論文名 Title	球面折紙作図の4つの基本操作	Four Origami Operations of Spherical Origami Construction
著者 Author(s)	川崎敏和	Toshikazu Kawasaki
受理年月日 Date of acceptance	2010/8/20	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2011/05/20 Vol. 1 No. 1 page 17-22	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

球面折紙作図の４基本操作

川﨑敏和

阿南工業高等専門学校　一般教科
774-0017，阿南市見能林町青木265
kawasaki@anan-nct.ac.jp

Four Origami Operations of Spherical Origami Construction

Toshikazu Kawasaki

要約　藤田に始まる折紙作図を球面折紙で考察する。球面折紙の折り線となる大円は，これを赤道とする２つの極点を一意に定める。本稿では，この対応を用いて平面折紙作図の基本操作を形式的に書き換えることで，球面折紙作図の４つの基本操作を導く。

Abstract: We reformulate *Huzita-Justin Axioms* into the origami operations with respect to spherical origami: notice that each point and its antipodal point on the sphere are to be paired in our study. Considering the correspondence between two poles and the equator (great circle) of the sphere, we propose that the eight axioms can be reduced into the four origami operations.

Keywords: Spherical origami, Origami conctruction, Axioms, Great circle, Pole

1. はじめに

藤田文章 [1] が提唱した折紙作図における基本操作は，J.Justinと羽鳥公士郎が見つけた基本操作Ⅷが追加されて完成した。以下のⅠ～Ⅷは羽鳥 [2] にならって表したもので，本稿では（平面折紙作図の）**８基本操作**とよぶ。

Ⅰ.　直線l, mの交点に点Xを置く。
Ⅱ.　直線l, mがあるとき，lをmに合わせる直線xを折る。
Ⅲ.　点A,Bがあるとき，AをBに合わせる直線xを折る。
Ⅳ.　点A,Bがあるとき，AとBを通る直線xを折る。
Ⅴ.　点A,直線lがあるとき，lに垂直でAを通る直線xを折る。
Ⅵ.　点A,Bと直線lがあるとき，Bをlに乗せAを通る直線xを折る。
Ⅶ.　点A,Bと直線l, mがあるとき,Aをlに乗せ,Bをmに乗せる直線xを折る。
Ⅷ.　点Aと直線l, mがあるとき，Aをlに乗せ，mに垂直な直線xを折る。

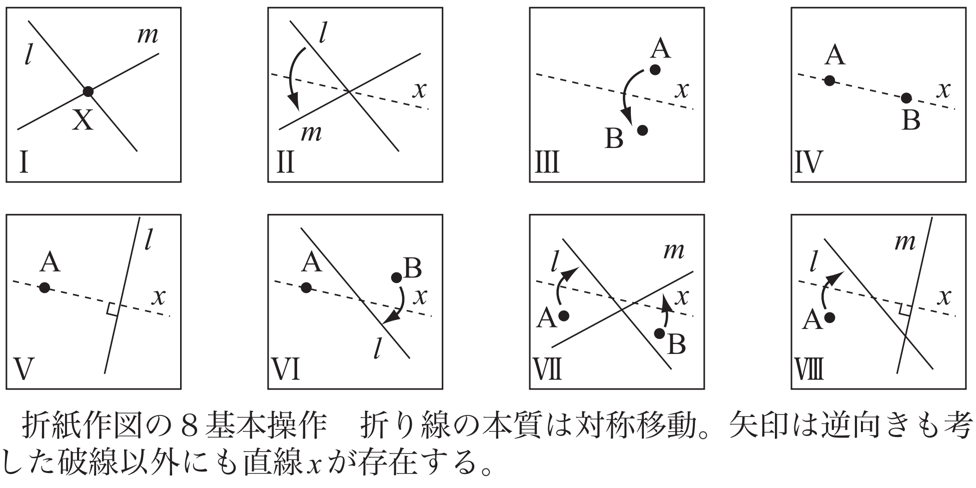


図１　折紙作図の８基本操作　折り線の本質は対称移動。矢印は逆向きも考える。図示した破線以外にも直線xが存在する。

８基本操作には気になる点がある。数が多過ぎること。基本操作Ⅰで新たな折り線がつかないこと。折り線をつける他の操作とは異質である。基本操作Ⅴ，Ⅶの「垂直」も気になる。もし「60度で交わる」となっていれば基本操作として受け入れられないだろう。90度だけを特別扱いしてよいものだろうか。本稿では，平面折紙作図の８基本操作を集合の包含関係で表現したのち球面折紙に書き変えることで手に入れた折紙作図の2つの舞台を比べて，折紙作図の本質を抽出して，前述の疑問を解消していく。なお本稿は，50SMEでの口頭発表を元に，その論文原稿を見直して整理・加筆修正したものである。

2. 記号化

集合論の記号を用いて基本操作を表現する。その際，**点は大文字**，**直線は斜体の小文字**，**折紙作図でつく直線は *x*** で表す。直線 l が直線 m に重なるように直線 x を折ることを $\boldsymbol{xl = m}$ で表す。つまり x を直線 x に関する鏡映写像 (線対称移動) と考えて，鏡映写像 x よる l の像 xl が m になると表現する。x は直線 x に関する鏡映写像なので，$l = xm$ でもある。

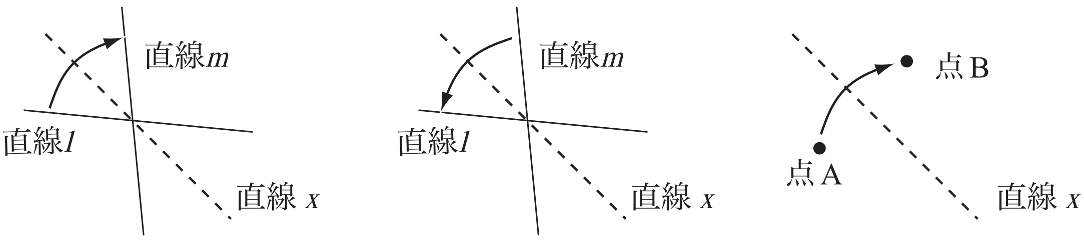
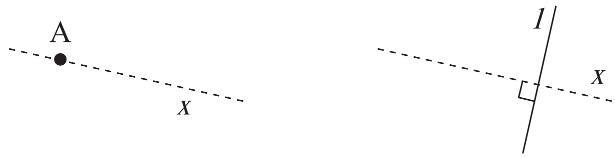


図2　左: $xl = m$　中: $xl = m$　右: $x\mathrm{A} = \mathrm{B}$



直線 x が点Aを通る　　直線 x が直線l に垂直

図3　左: $\mathrm{A} \in x$,　右: $x \perp l$

注意:　鏡映写像 x を折り線 x で区切られた半平面の一方を他方に重ねる実際の折りと混同してはならない。折り線 x で区切られた半平面がそれぞれ他方に移動する。そのため，図2のように矢印で写像 x を表していても，矢印は両方向を向いている。また直線 x が点 A を通ると，点 A が集合 x の要素になるので，$\boldsymbol{\mathrm{A} \in x}$ と表せる (図3) 。

命題1　平面折紙作図の８基本操作は次のように表現できる。

Ⅰ.　$\mathrm{X} \in l, \mathrm{X} \in m$
Ⅱ.　$xl = m$⊠⊠　　⊠
Ⅲ.　$x\mathrm{A} = \mathrm{B}$
Ⅳ.　$\mathrm{A} \in x$, $\mathrm{B} \in x$
Ⅴ.　$x \perp l$, $\mathrm{A} \in x$
Ⅵ.　$x\mathrm{B} \in l$, $\mathrm{A} \in x$⊠ ⊠
Ⅶ.　$x\mathrm{A} \in l$, $x\mathrm{B} \in m$
Ⅷ.　$x \perp l$, $x\mathrm{A} \in m$

3. 球面折紙作図の基本操作

平面の折紙作図では紙を平たく折って直線の折り目をつける。川崎 [3] で定義された**球面折紙**とは平面の代わりに球面を折るもので，折り線は赤道のような大円であり，赤道で折ると北半球は南半球に，南半球は北半球に移る (図4) 。なお球面折紙では，折る過程は考えずに最初と最後だけを考える。

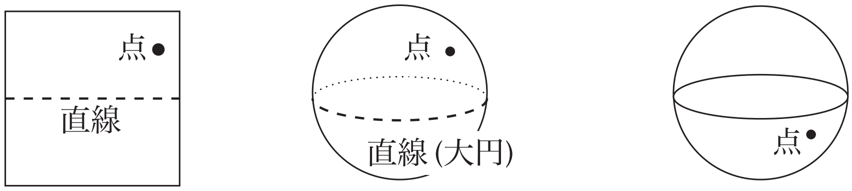
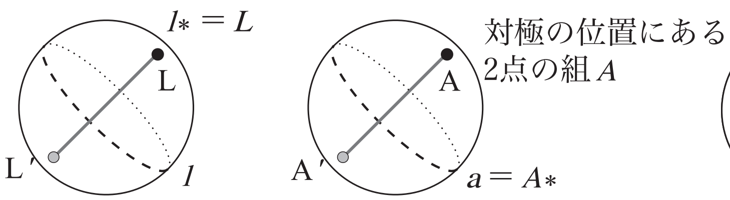


図4　左:平面上の折紙作図，　中: 平面上の折紙作図　　右:折ったあと

4. 双対表現

対極の位置にある球面上の2点の組 {A, A′} を**斜体太文字で*A***と表す。直線 l を与えると，これを赤道とする極点の組が一意に定まる。直線 l との関係がわかるように, この点の組を大文字で $\boldsymbol{L}=\{\mathrm{L},\mathrm{L}'\}=\boldsymbol{l_*}$ と表し，***l*の双対**とよぶ。逆に，対極の位置にある点の組 $A=\{\mathrm{A},\mathrm{A}'\}$ で定まる大円を小文字で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A_*}$ と表し，***A*の双対**とよぶ。また, 対極の位置にある点の組 $A=\{\mathrm{A},\mathrm{A}'\}$,$B=\{\mathrm{B},\mathrm{B}'\}$ に対して, 線分 AA′と線分 BB′が垂直であることを $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ と表す (図6) 。

定義1　対極の位置にある点の組 A や直線 l への $\boldsymbol{X}=\{\mathbf{X},\ \mathbf{X}'\}$ **の作用**を，**線分 XX′を軸とする180度回転**で定義する。



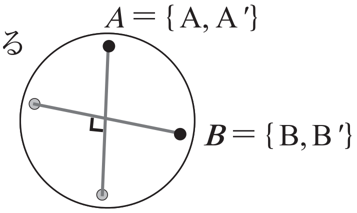


図5　左：$l_*=L=\{\mathrm{L},\ \mathrm{L}'\}$
　右：$a=A_*=\{\mathrm{A},\ \mathrm{A}'\}_*$

図6　$A\perp B$

命題2　対極の位置にある点の組 A, 直線 x , l, m とその双対 a , X, L, M に対して，次がなりたつ。

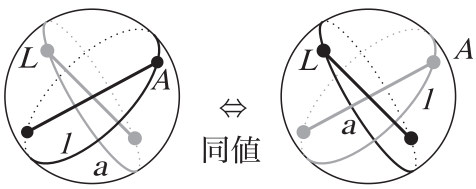
(1)　$A\subset l\ \Leftrightarrow\ A\perp L\ \Leftrightarrow\ L\subset a$,

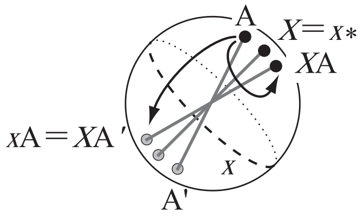
(2)　$XA=xA$ (第6回折り紙の科学・数学・教育研究集会，2009において羽鳥公士郎が指摘),

(3)　$Xl=xl$,

(4)　$l\perp m\ \Leftrightarrow\ L\perp M$.

証明:　(1) $A=\{\mathrm{A},\mathrm{A}'\}\subset l$ ならば, 線分AA′は直線 l で定まる平面 (円板) に含まれる。直線 l の双対 $l_*=L=\{\mathrm{L},\mathrm{L}'\}$ の2点を結ぶ線分LL' はこの平面に垂直なので平面内にある線分 AA′と垂直になる。したがって $A\perp L$ となる。$A\perp L\Leftrightarrow L\perp A$ なので，$L=\{\mathrm{L},\mathrm{L}'\}\subset a$ が成り立つ (図7) 。(2) $XA=\{X\mathrm{A},\ X\mathrm{A}'\}=\{x\mathrm{A}',x\mathrm{A}\}=\{x\mathrm{A},x\mathrm{A}'\}=x\{\mathrm{A},\mathrm{A}'\}=xA$ (図8) 。　(3) 直線は点の集合だから，(2) の性質は直線にも引き継がれる　(図9) 。(4) $l\perp m\Leftrightarrow l$, m が定める２平面が直交 ⇔ 平面の法線が直交 ⇔ $L\perp M$。





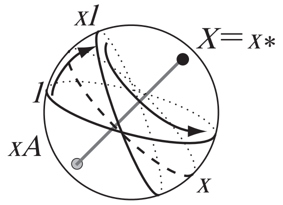


図7　$A\subset l$ と $a\supset L$ は同値　　図8　$xA＝XA$　　図9　$xl＝Xl$

命題2 (1) は特に有用である。例えば $A\subset l$ のような包含関係が与えられると，それを元にして大文字と小文字，⊂と⊃の置換により，図を用いずに同値の包含関係 $a\supset L$ が得られる。さらに直交関係も包含関係に書き換えられる。

命題2を用いて基本操作Ⅰ～Ⅷを書き換えると次のⅠ＊～Ⅷ＊のようになる。線分で結ばれたものは，文字の違いを除けば同じ構造を持っていることがわかる。

①	Ⅰ＊.	$L\subset x$, $M\subset x$		Ⅰ.	$X\subset l, X\subset m$
②	Ⅱ＊.	$xL＝M$⊠⊠	⊠	Ⅱ.	$xl＝m$
	Ⅲ＊.	$xa=b$		Ⅲ.	$xA=B$
	Ⅳ＊.	$X\subset a$,　$X\subset b$⊠	⊠	Ⅳ.	$A\subset x$, $B\subset x$
	Ⅴ＊.	$L\subset x$, $A\subset x$⊠	⊠	Ⅴ.	$L\subset x$ ($x\perp l$), $A\subset x$
③	Ⅵ＊.	$L\subset xb$, $A\subset x$⊠	⊠	Ⅵ.	$B\subset xl$, $A\subset x$
④	Ⅶ＊.	$L\subset xa$, $M\subset xb$⊠	⊠	Ⅶ.	$A\subset xl$, $B\subset xm$
	Ⅷ＊.	$L\subset x$, $M\subset xa$⊠	⊠	Ⅷ.	$L\subset x$ ($x\perp l$) , $A\subset xm$

5. 同一構造の検証

基本操作Ⅰ，Ⅳ，Ⅴを集合の記号を使わずに表現して，構造の同一性を図形的に検証する (図10) 。

Ⅰ．直線 l, m の交点に，対極の位置にある点の組 X を置く。

Ⅳ．対極の位置にある点の組 A, B があるとき，A と B を通る直線 x を折る。

Ⅴ．対極の位置にある点の組 A と直線 l があるとき，l に垂直で A を通る直線 x を折る。

図10を見てもⅠ，Ⅲ，Ⅳの同一性は見いだせないが，双対要素をすべて書き加えると，構造が同じであることがわかる (図11) 。

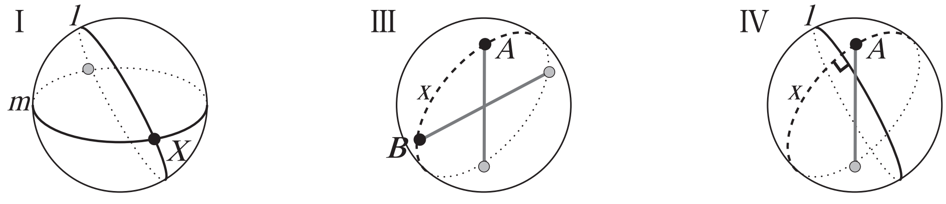


図10　基本操作Ⅰ，Ⅳ，Ⅴ

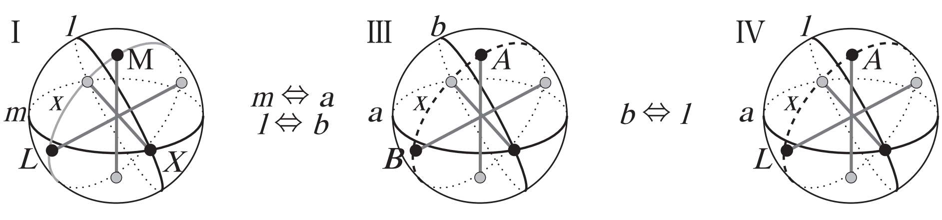


図11　基本操作Ⅰ，Ⅳ，Ⅴに双対を描き加えたもの

基本操作ⅡとⅢ(図12),基本操作ⅥとⅧ(図13)も,双対要素を加えると,登場する点や直線おもびそれらに位置関係が同一だとわかる(図14,15)。対極の位置にある点の組A,Bと直線l,mがあるとき,

Ⅱ. lをmに合わせる直線xを折る。
Ⅲ. AをBに合わせる直線xを折る。
Ⅵ. Bをlに乗せAを通る直線xを折る。
Ⅷ. Aをlに乗せ,mに垂直な直線xを折る。

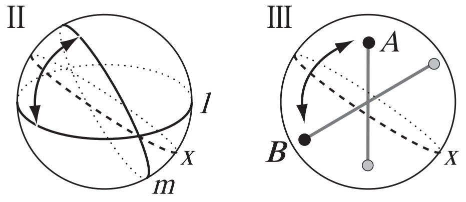


図12　基本操作Ⅱ，Ⅲ

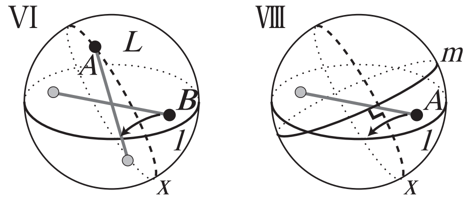


図13　基本操作Ⅵ，Ⅷ

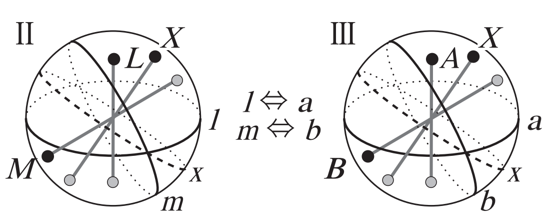


図14　基本操作Ⅱ,Ⅲとその双対

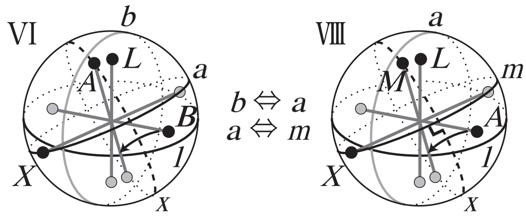


図15　基本操作Ⅵ,Ⅷとその双対

6.まとめ　球面折紙作図の８基本操作は次のようにまとめられる。

定理　球面折紙作図には次の４基本操作がある(図16)。対極の位置にある点の組A,Bと直線l, mが与えられたとき,

① $A\subset x$, $B\subset x$　：A,Bを通る直線xを折る。
② $xA=B$　：AがBに重なるように直線xを折る。
③ $A\subset x$, $B\subset xl$ ：Aを通り，Bが直線lに乗るように直線xを折る。
④ $A\subset xl$, $B\subset xm$：Aが直線lに乗り，Bが直線mに乗るように直線xを折る。

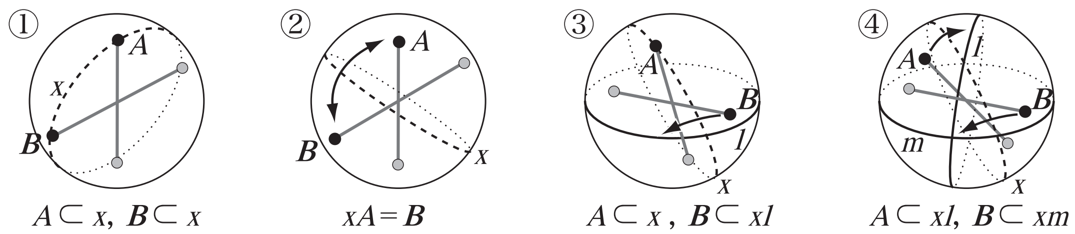


図16　球面折紙作図の４基本操作

平面折紙作図の折り目がつかない基本操作Ⅰは，球面折紙で解釈すると，2点を結ぶ折り目をつけていることがわかる。基本操作Ⅴ，Ⅷの「垂直」は点と直線の包含関係と同値であり，90度という数値以上の意味を持ことがわかった。このように平面折紙作図で気になった点は解決した。ただ，定理の②のみが等式で表現されていることに何らかの意味があるのかという新たな疑問が生じた。この疑問は，球面折紙作図の基本操作の直接的構築や高次元折紙作図を考察することで解消されるであろう。

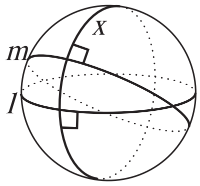


図17　$x \perp l,\ x \perp m.$

7. 補足

定理は平面折紙作図の８基本操作を球面に変換して整理したものであり，直接に球面折紙作図の基本操作を作ったものではない。実際，羽鳥は球面折紙作図特有の基本操作；直線l, mがあるとき，l, m に垂直な直線 xを折る (図17) という操作を発見している (第8回折り紙の科学・数学・教育研究集会，2010) 。

50SME (2010年7月，シンガポール) での本研究の口頭発表を行ったとき，射影平面で考えているのかとの質問があったがそうではない。あくまでユークリッド空間内で球面を折る話である。対極の位置にある2点は必ずペアで取り扱われるが，同一視せずに射影平面の一歩手前で踏み留まる。射影化しないのは，球面折紙には平面折紙作図との対比および高次元折紙への橋渡しという2つの役割があり，射影化するとそれらの役をなさないからである。

8. 謝辞

羽鳥公士郎氏が第6回折り紙の科学・数学・教育研究集会において$XA = xA$を指摘してくれたこと，第8回同研究集会において，球面折紙特有の基本操作 (図17) を提示してくれたことで研究の方向性が明確になったことに感謝する。

参考文献

[1] Huzita, H.“Axiomatic Development of Origami Geometry.”In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, edited by H. Huzita, pp. 143-158. Padova, Italy: Dipartmento di Fisica dell’Universita di Padova, 1991.

[2] Hatori, K.“K’s Origami: Origami Construction”Available at http://origami.ousaan.com/library/conste.html, 2002.

[3] 川崎敏和,「高次元の平坦折り紙について」, 佐世保工業高等専門学校研究報告第25号 (1988) , 187–159.