論文名 Title	和算の問題から得られた折り紙の命題	Origami Theorems from WASAN (Japanese Traditional Mathematics)
著者 Author(s)	前川淳	Jun Maekawa
受理年月日 Date of acceptance	2010/9/30	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2011/05/20 Vol. 1 No. 1 page 23-30	
備考 Note	以下の誤りを訂正する。(2012/10/25） 誤：杉妻村大字田沢 丹治徳次郎 正：杉妻村大字黒岩 中村熊治郎 誤：徳次郎の算額定理 正：熊治郎の算額定理	

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

和算の問題から得られた折り紙の命題

-折り紙に関連する命題の、折り紙を用いた確認と初等幾何学的証明-

前川淳
国立天文台
384-1305 長野県南佐久郡南牧村野辺山 462-2
maekawa@nro.nao.ac.jp

Origami Theorems from WASAN (Japanese Traditional Mathematics)

MAEKAWA Jun
National Astronomical Observatory Japan
462-2 Nobeyama Minamimaki Minamisaku Nagano 384-1305, JAPAN

要約： 17-19 世紀の日本の伝統的な数学である和算には、折り紙に関連する問題がある。これは、折り紙の隠れた歴史のひとつである。さらに、それらは、折り紙の数学の問題の源泉にもなる。筆者は、古いひとつの問題から、折り紙に関連する命題をいくつか得た。解答を折り紙の手法によって確認するというアイデアに関連するものと、折り紙によって三角形の傍心を示すということに関連するものである。

Abstract： We can find some problems related to origami in WASAN(Japanese native mathematics in the 17th - 19th centuries). That is a lesser-known part of the history of origami. Moreover, those problems can be a source of new mathematical origami problems. This paper shows several propositions that the author has derived from one of such old problems. Some of them are related to a confirmation method of the solution using origami, and the others to showing a triangle’s excenters by the origami technique.

Keywords： Origami, WASAN (Japanese Traditional Mathematics), Excenters, Euclidean Geometry

1. はじめに

江戸の初期から明治大正まで日本で独自に発展した数学・和算には、算額という習俗がある。算額とは、数学の問題とその答えを記した絵馬の一種で、全国の寺社に約 1000 面が遺っている[1]。こうした算額や和算の書籍の中に、折り紙を扱った問題がある。このような問題は約 20 問確認できている（調査した資料の 1%程度である）が、本稿で扱うのは、その問題のひとつである。この問題は、命題として明快であり、また、より密接に折り紙に関係する命題として発展させることができたものである。なお、命題の証明にあたっては、和算から発展させた命題であることを考えて、座標を使った解析幾何学的手法を使わないことを課した。

2 .「徳次郎の算額定理」

本稿の中心的な命題となるのは、福島県の黒岩虚空蔵堂に遺る算額の問題である。これは、明治 26 年（1893 年）に掲額されたものだが、現在は復元したものが掲げられている[2] [3] 。この命題は、『忘れられた定理：算額定理（Sangaku Theorem）』[4]として紹介され、有名になったものであるが、単に「算額定理」と呼称すると、総称と誤解されるおそれがあるので、本稿では、掲額者の名を取って「徳次郎の算額定理」とする。

命題 1（「徳次郎の算額定理」）：（図 1）

正方形において、左辺上の、頂点を除く任意の点に、右下の頂点を合わせて折った場合、図の三角形に内接する円の半径は、図の「鈎」に等しい。なお、「鈎」というのは、直角三角形の短辺を意味する言葉であるが、本命題では、長辺になる場合もあるので注意が必要である。

なお、じっさいの算額では、以下のように「円の直径はどうなるか」という問題と、「鈎の倍が円の直径となる」という答えとしてのみ示されている。

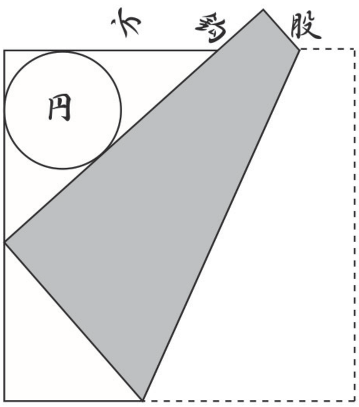


図 1　「徳次郎の算額定理」
円の半径は「鈎」に等しい

今有図　折方紙作鈎股　容円　只云　鈎若干
問得円径術如何
答曰　如左術
術曰　置鈎　倍之　得円径　合問
杉妻村大字田沢　丹治徳次郎

一般に和算では証明の概念が薄く、また、とりわけ算額は、問いと答えという形式なので、掲額した本人の証明の詳細は不明である。以下に示す証明は、この命題を小道具とした小説・『幕末算法伝』（1989）[5] の中で紹介されたものを、現代の表記で書きなおしたものである[*1]。

*1　1987 年にブルガリアでこの命題が紹介されたさい、高校生（姓名などは調査できなかった）から寄せられた証明に基づくものとされ[2]、たいへん鮮やかな証明になっている。

証明（小説『幕末算法伝』の証明）：
（図2：図の向きは算額のものを時計周りに90度回転させ、鏡像にしたものである）
正方形ABCDの一辺の長さを1として、CをAB上の端点を除く点に合わせて折る。CDは、C′D′に移る。C′D′とADの交点をGとする。補助線として、CとC′、CとGを結ぶ。また、CからC′D′におろした垂線の足をHとする。
すると、HC′=C′Bである[*2]。また、GH=GDである[*3]。いっぽう、△AC′Gの内接円の中心から各辺におろした垂線の足をP、Q、Rとすると、それらの線分によって分割された三組の三角形の合同により、PC′=RC′、QG=RG、PA=QAである。

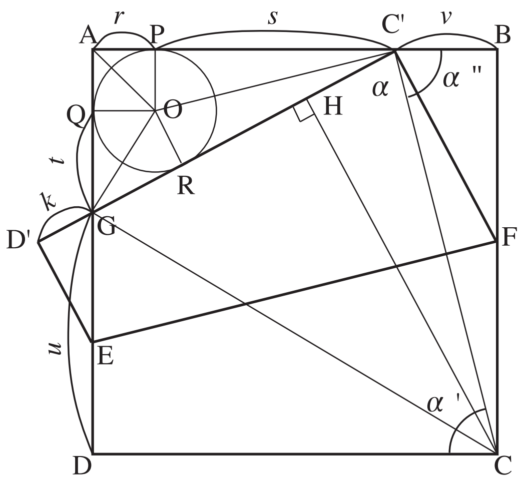


図2　「徳次郎の算額定理」
証明のための図

以上をふまえ、それぞれの線分の長さを、k=D′G、u=GD、v=C′B、r=AP、s=PC′、t=QGとおくと、まず、ABにおいて、以下の式がなりたつ。

$$r + s + v = 1 \tag{1}$$

つぎに、ADにおいて、以下の式がなりたつ。

$$r + t + u = 1 \tag{2}$$

さらに、D′C′において、HC′=C′B、およびGH=GDであるから、以下の式がなりたつ。

$$k + u + v = 1 \tag{3}$$

また、同じくD′C′において、PC′=RC′、QG=RGであるから、以下の式がなりたつ。

$$k + t + s = 1 \tag{4}$$

(1)式と(2)式、(3)式と(4)式の両辺を足すと、$2r + u + v + s + t = 2$ および $2k + u + v + s + t = 2$ となる。この2式の比較により、$k = r$である。すなわち、kは内接円の半径に等しい。

なお、内接円の半径が最大となるのは、△AC′Gが直角二等辺三角形になる場合で、そのときの円の半径は、$3 - 2\sqrt{2} = 0.1715\ldots$である。これは、微分の練習問題となる。

---

*2 △C′HC≡△C′BCから、HC′=C′Bを示す。折り返して重なるものなので（EFとC′Cが直交することに注意）、∠D′C′C(α)=∠DCC′(α′)である。また、平行線の錯角なので、∠BC′C(α′′)=∠C′CD(α′)である。以上により、∠D′C′C(α)=∠BC′C(α′′)である。斜辺と一角という直角三角形の合同条件により、△C′HC≡△C′BCである。したがって、HC′=C′Bである。

*3 △GHC≡△GDCから、GH=GDを示す。△C′HC≡△C′BCであるから、HC=BCである。さらに、DC=BCであるから、HC=DCである。斜辺と他の一辺という直角三角形の合同条件により、△GHC≡△GDCである。したがって、GH=GDである。

3.「徳次郎の算額定理」の「折り紙的確認」

「徳次郎の算額定理」の内接円は、伏見の定理[6]により、三角形の「つまみ折り」と関連づけて考えることができる。この視点により、「徳次郎の算額定理」は、折り紙の技法を使って確認することができるようになる。つまり、「つまみ折り」の折り目の交点が内接円の中心であることから、図 3 のように、「つまみ折り」の線分に、「鉤」(D´G)を合わせて、同じ長さであることを確認できるのである。これは、証明ではないが、じっさいに長さの一致をみることで、直感的な理解の助けになる方法である。本稿では、このように、じっさいに紙を折って図形を確認する方法を、「折り紙の手法による確認」または、「折り紙的確認」と称している。

ただし、図 3 の確認方法は自明なことではない。一般に、同じ長さであっても、二本の線分は一回の折りで一致させることはできない。二本の線分が同一の直線上にない場合、それらを一回の折りで一致させる必要十分条件は、それらの線分を延長した線の交点から、各々の線分の近い端点までの距離が同じになることである。

命題 2:「徳次郎の算額定理」において、内接円から AB に下ろした垂線の足を P とすると、PO と D´G は、一回の折りで一致させることができる。

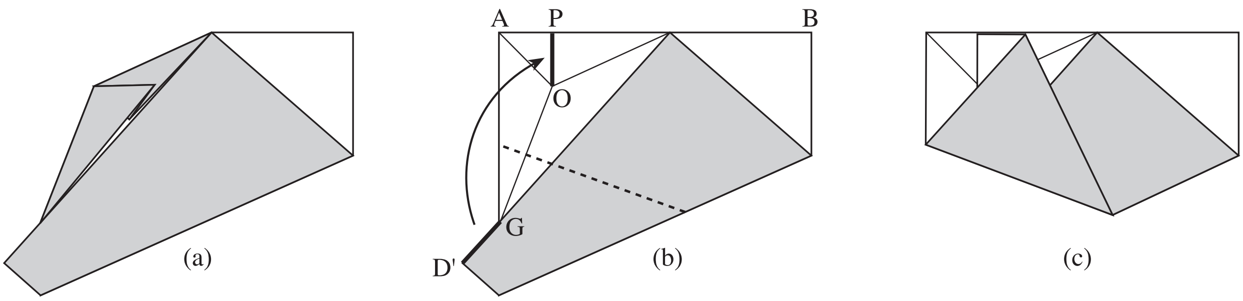


図 3 「徳次郎の算額定理」の「折り紙的確認」

証明:(図 4)内接円の中心を O として、そこから C D に垂線をおろし、その足を T、C´D´との交点を S とする。命題 1 の証明の(1)式および、(3)式、および、$k = r$(「徳次郎の算額定理」)により、$u = s$、すなわち、G D = P C´となる。また、△D´GE≡△DTE により、D´T = G D である。以上により、D´T = P C´となる。内角が明らかに等しいことも条件として、△P C´S ≡△D´T S である。よって、S D´= SP となる。したがって、OP と G D´は一回の折りで一致させることができる。

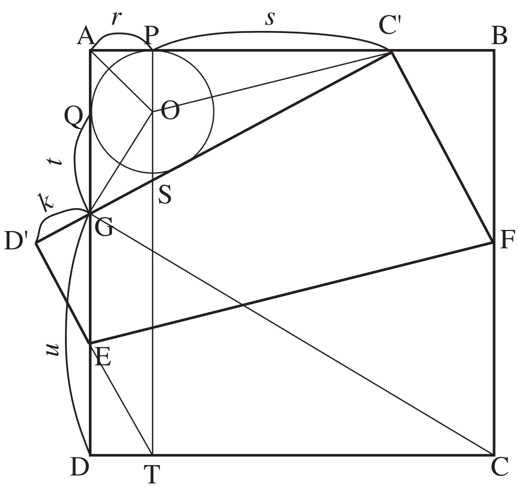


図 4 命題 2 証明のための図

4. 「徳次郎の算額定理」の「折り紙的確認」と傍心

「徳次郎の算額定理」において「折り紙的確認」をおこなった正方形を展開すると、つまみ折りの折り目を除外して、3 つの線分が折り目としてついている。じっさいにいくつかの場合で折ってみると、この線分の交点が正方形の対角線上にのることが予想された。以下、これを証明するために、交点が正方形の対角線にのる、より一般的な場合をみる。「徳次郎の算額定理」とは異なり、C´ が AB にのらない折りかたである。

命題 3：以下の①②③の操作によって得られた点 K は、対角線 AC の上にのる（図 5(d)）。
①正方形 ABCD を、A D 上と BC 上の端点を除く任意の二点 E と F を結ぶ線分で折る(a)。
②D´ E（折り返された線分）と A B を合わせて折る(b)。
③これを展開する。３本の線分の交点からなる点が K である(c)。
補足：①でつけた線分と②でつけた線分は、45°の角度で交差する。

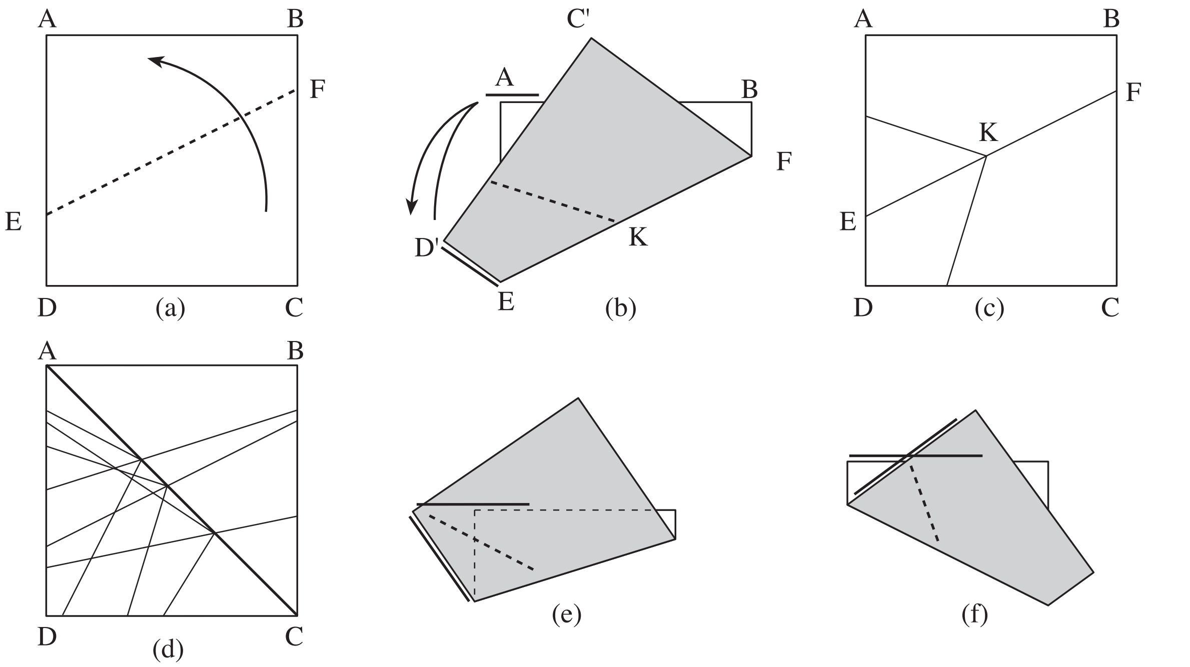
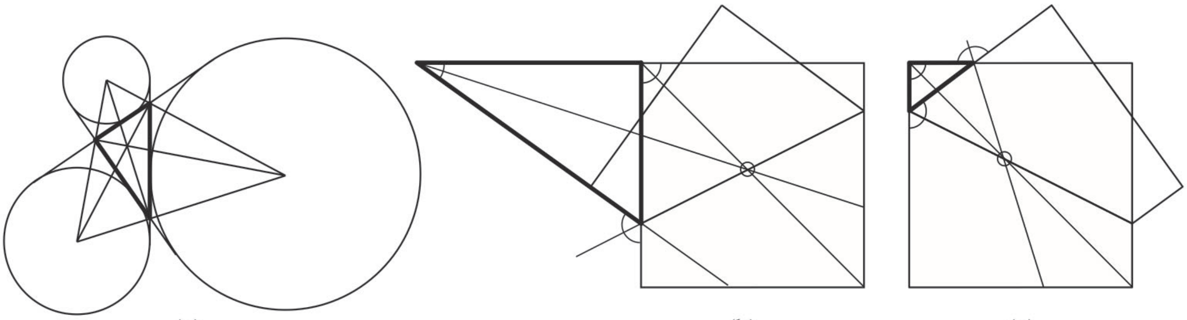


図 5　命題 3：(d)で、交点 K が対角線上にならぶ。 (e)と(f)は、(b)に相当する別の折りかた。

証明：（図 5）(b)において、交点 K は、AB の延長、D´ E の延長、および、AE がつくる直角三角形の傍心（三角形のふたつの外角の二等分線と、もうひとつの角の二等分線が交わる点）となる。この直角三角形の直角の外角（EF のとりかたによっては直角三角形の直角それ自体）の二等分線は、もとの正方形の対角線に対応する。したがって、交点 K は、もとの正方形の対角線上にのる（図 6 も参照）*4。

*4　①②③によって求まる点 K が三角形の傍心となることは、筆者が、2010 年 8 月 14 日の折紙探偵団コンベンションでこの命題を発表したのち、それを聴講していた羽鳥公士郎氏が指摘したものである。



(a) (b) (c)

図 6　三角形の傍心：図 6 (b)は図 5 (b)に、図 6 (c)は図 5 (f)に対応する。

じっさいに折るさいの注意として、以下を付記しておく。
正方形の上辺が折り返した面に隠れる場合は、図 5 (e)のように辺を透視して合わせ、折り目が右下がりの場合は、図 5 (f)のように合わせる。

命題 3 の補足（線分が 45°で交差すること）は、傍心に対応する三角形が直角三角形であることによるもので[*5]、線分が一点で交わることがわかれば、次のように示すことができる。

命題 3 補足の証明：(図 7) E から DC に平行な線をひき、BC との交点を I とする。∠F E I を θ とおき、∠A E J を ϕ とおく。∠D′ E F = ∠D E F（折り返しで等しい）であることから、$\phi + (90^\circ - \theta) = \theta + 90^\circ$ となり、$\phi = 2\theta$ となる。△A J E の内角の和により、∠A J E = $90^\circ - \phi = 90^\circ - 2\theta$ である。したがって、∠K J E = ∠A J E /2 = $45^\circ - \theta$ である。また、∠J E K = $\phi + (90^\circ - \theta) = \theta + 90^\circ$ である。よって、△J K E の内角の和から、∠J K E（α）= $180^\circ - (45^\circ - \theta) - (\theta + 90^\circ) = 45^\circ$ である。

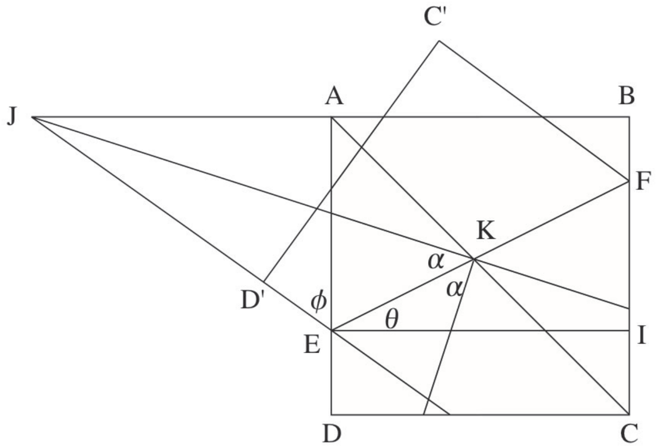


図 7　命題 3 の補足を証明するための図

*5　命題 3 は、正方形の折り紙用紙を使った 90°で交差する直線の場合にのみ成立するものではなく、より一般化することができるが、本稿の本筋からは離れるので詳細には触れない。

ここで、正方形の頂点を辺上の点に合わせる折りかた、すなわち「徳次郎の算額定理」の折りかたに戻る。「徳次郎の算額定理」の「折り紙的確認」において、頂点を辺上の点に合わせて折ることは、命題 3 の特殊な場合であるから、交点が対角線 AC にのるのは明らかである。ここで注目したいのは、交点の位置で、これについては、以下がなりたつ。

命題 4：(図 8)「徳次郎の算額定理」の「折り紙的確認」をしたさいにできる交点 K は、正方形の対角線 AC にのり、K から AB までの距離は、(内接円の半径 +1) /2 となる。

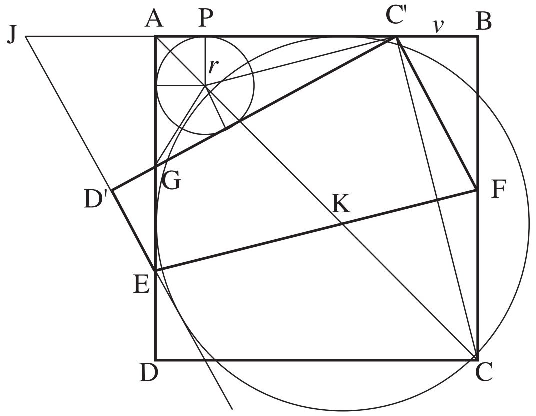


図 8　命題 4 の説明と証明のための図

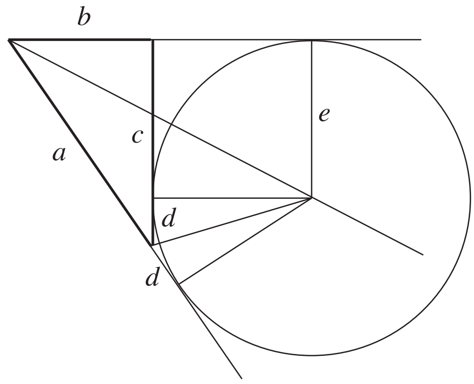


図 9　傍接円の半径 $= (a + c - b) / 2$

証明：(図 8、9)　K から AB までの距離は、△A J E の傍接円の半径に等しい。まず、図 9 に見るように、直角三角形の傍接円の半径は、(円が接する辺+斜辺 - 残りの辺) / 2 である[*6]。よって、△A C´ G の A C´に接する傍接円の半径 x（最終的に求めているものではない）は、PC´に等しい。これは、内接円の半径を r、$v =$ C´ B とすると、$x = 1 - r - v$ となる。つぎに、内接円の半径 r を v で表すと、$r = v(1 - v) / (1 + v)$ となる[*7]。また、ED を v で表すと、
$\mathrm{ED} = (1 - v)^2 / 2$ である[*8]。
以上により、△A EJ の AE に接する傍接円の半径を re とすると、△A C´ G∽△A E J の比率を、A C´と AE で表して、以下になる。なお、ここで、A C´$= 1 - v$、AE $= 1 -$ ED である。

$$re = \left(1 - \frac{v(1-v)}{1+v} - v\right)\frac{1 - \frac{(1-v)^2}{2}}{1-v} = \frac{v(1-v) + 1 + v}{2(1+v)} = \frac{r+1}{2} \tag{5}$$

*6　図 9 で、$b + e = a + d$ であり、$d = c$ - e である。したがって、$b + e = a + c - e$ であり、$e = (a + c - b)/2$　となる。

*7　△C´ B F∽△G D´ E と、C´ B + BF =1、D´ E + EG = GD = PC´ $= 1 - r - v$ から、$r / v = 1 - r - v$ となる。これを r について解く。

*8　△C´ B F におけるピタゴラスの定理（和算では「鈎股弦の理」）と C´ B + BF = 1 から、B F $= (1 - v^2) / 2$ である。△C´ B F∽△G D´ E から、$r / v =$ BF / D´ E $= (1 - v^2) / 2$ D´ E である。E D = D´ E なので、E D $= (1 - v^2) v / 2r$ である。これに v で表した r を代入し、ED$=(1 - v^2) v\ (1 + v) / 2 v (1 - v)$ となる。これを通分する。

この傍接円の半径も、ひと折りで「折り紙的確認」ができる。まず、図 10 で、PB = 1 - r である。$(r + 1)/2 = r + (1 - r)/2$ と変形できるので、P と B を合わせて折り、その折り目と AB の交点を L とおけば、AL = $(r + 1)/2$ となる。いっぽう、K は、もとの正方形の対角線上にあるので、K から AB に垂線をおろすと、その足と A の距離は、この垂線の長さと同じになる。すなわち、P と B と合わせたときの折り目が K を通れば、KL = $(r + 1)/2$ の確認になる。

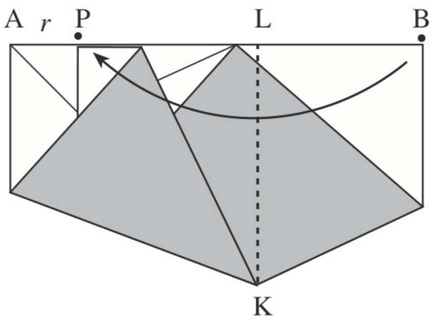


図 10　傍接円の半径の「折り紙的確認」

5. まとめ

折り紙を扱った算額の命題（「徳次郎の算額定理」）から、いくつかの命題が導かれた。これらの命題は、正方形の折り畳みといった特殊な条件での命題であるが、芳賀和夫氏の提唱したオリガミクス、すなわち、「紙を折ったり重ねたりして、そこに生じる数理現象を追求する」[7]という命題の典型例となっている。なお、これらの命題に関しては、じっさいに紙を折って、本稿でいう「折り紙的確認」を体験することを奨める。折り紙では、直角や辺の整数等分など、規格化された角度や比率で紙を折ることが条件となって、さまざまな工程で点と点や線と線が合うことが確認されることが多い。本稿の「折り紙的確認」は、それらとはすこし異なり、任意の折り目から始めた工程で、幾何学的な一致を確認できる例である。これは、折り紙愛好家にとっても新鮮な体験となるはずである。

6. 謝辞

本稿のきっかけとなった、折り紙に関連する和算の問題の文献調査においては、文献[8]執筆時に奥村博氏に協力をいただいた。また、脚注 4 にも書いたように、命題の幾何学的な意味に関しては、羽鳥公士郎氏から的確な指摘をいただいた。

文献

[1] 深川英俊,『例題で知る日本の数学と算額』, 1998, 森北出版
[2] 深川英俊, ダン・ペドー,『日本の幾何 - 何題解けますか?』, 1991, 森北出版
[3] 福島県和算研究保存会,『福島の算額』, 1989, 蒼樹出版
[4] 著者不明,『Forgotten Theorems Extravaganza』, Singapore(1994),『Mathematics and Information Quarterly Vol.4 No.4, 202
[5] 小野寺公二,『幕末算法伝』, 1989, 講談社
[6] 伏見康治, 伏見満枝,『折り紙の幾何学　増補新版』, 1984, 日本評論社
[7] 芳賀和夫,『オリガミクス I』, 1999, 日本評論社
[8] 前川淳,『弘化二年のオリガミクス』, 1996,『をる』（双樹舎） 14 号, 52-53