

論文名 Title	2種類の箱を折れる展開図に関する研究	On Common developments of Two Boxes
著者 Author(s)	上原隆平、三谷純	Ryuhei Uehara and Jun Mitani
受理年月日 Date of acceptance	2010/8/17	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2011/05/20 Vol. 1 No. 1 page 1-16	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

2種類の箱を折れる展開図に関する研究

上原隆平 (uehara@jaist.ac.jp)
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
〒923-1292 石川県能美市旭台 1-1

三谷純 (mitani@cs.tsukuba.ac.jp)
筑波大学 システム情報工学研究科
JST ERATO
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1

On Common developments of Two Boxes

Ryuhei Uehara (uehara@jaist.ac.jp)
School of Information Science, JAIST
Asahidai 1-1, Nomi, Ishikawa 923-1292, Japan.

Jun Mitani (mitani@cs.tsukuba.ac.jp)
Graduate School of SIE, University of Tsukuba
JST ERATO
Tennodai 1-1-1, Tsukuba, Ibaraki 305-8573, Japan.

要約：本論文では、複数の異なる箱を折ることができる展開図について研究する。これまで、異なる2種類の箱を折ることができる展開図が2個知られていた。本論文では、こうした展開図を見つけるアルゴリズムを2種類提案する。実装して実行した結果、9000個近くの展開図が得られた。この結果を拡張し、まず異なる2種類の箱を折れる展開図が無限に存在することを証明した。また異なる2種類の箱を折れる展開図の中にタイリングがあることを示した。最後に任意の定数 k に対して、少なくとも k 種類の（必ずしも凸とは限らない）異なる直交多面体を折れる展開図が存在することを示した。

Abstract: In this paper, we study a polygon that can fold to two different orthogonal boxes. Previously, there are two known polygons with this property. We develop two algorithms for this problem. We implement them and obtain around 9000 such polygons. Extending the results, we first show that there is an infinite of such polygons. We also find a tiling that can fold to two different orthogonal boxes. Moreover, for any positive integer k , we show that there exists a polygon that can fold to at least k different orthogonal polyhedra (not necessarily convex).

Keywords: Common development, orthogonal box, tiling.

1 はじめに

凸多面体を折ることのできる多角形に関する研究は、1996年のLubiwとO'Rourkeによる研究に端を発する[1]。近年DemaineとO'Rourkeが幾何的な折りのアルゴリズムに関する総括的な本を出版したが、その中にもこうした多角形に関する結果が多数納められている[3, Chapter 25]。中でも「複数の多面体を折ることができる1個の展開図」は興味深い問題である。Biedlらは1999年に「2種類の直方体が折れる1つの直交な展開図」を実際に2つ見つけることに成功した[2]（これらは[3, Figure 25.53]に掲載されている）。ではこうした多角形は「例外的」なのであるか？実はそうではない。本論文では、最初にこうした性質をもつ展開図を探索するアルゴリズムを2つ紹介する。これらのアルゴリズムを実装して実行した結果、こうした展開図を25000個以上見つけることに成功した。これらのアルゴリズムは、凸多面体の直交な展開図がもつ非自明な性質を利用している。

こうした多角形の中には一般のサイズに拡張できるものがある。そこから2種類の箱を折れる展開図は無限に存在することが示せる。またこうした展開図の中には平面を埋めつくす(タイリングとよばれる)ものもある。こうした展開図を使えば、体積の異なる2種類の箱を必要に応じて作りわけることができ、しかも材料のロスをなくすことができる。

この問題を一般化した問題についてもいくつかの結果を示す。まず同型の直方体を許せば、大きさ $1 \times 1 \times 2$ の直方体を3通りの方法で折れる展開図が存在する。単位立方体の展開図は折り方は一意的に決まるので、これはこうした性質をもつ最小の展開図である。一般の(必ずしも凸でない)多面体を許せば、市販のパズル「キュービガミ7」が面積14で7種類(つまりすべて)の直交多面体を折れる最小の展開図を与えてくれる。さらに、与えられた任意の整数 k に対し、 k 個以上の異なる直交多面体を折ることのできる展開図が存在することを構成的に示す。つまり、必ずしも凸でない多面体を許せば、任意に多くの直交多面体を折れる1つの展開図が存在する。

なお本論文は、[6]で発表された結果を和訳し、さらに加筆修正したものである。

2 準備

本論文で扱う展開図(および多面体の各面)はすべて単位正方形からなるとする。単位正方形の境界以外で折ることも許さない。正整数 S に対し、 $0 < a \leq b \leq c$ と $ab + bc + ca = S$ を満たす3つの整数の組 (a, b, c) の集合を $P(S)$ と書くことにする。つまり $P(S) = \{(a, b, c) \mid ab + bc + ca = S\}$ である。ここで a, b, c を直方体の3辺の長さであると考えると、面積を $2S$ で表現できることに注意する。つまり $|P(S)| \geq k$ であることは、表面積 $2S$ の直方体を折れる k 個の展開図が存在することの必要条件である。例えば[2]の2つの結果は $P(11) = \{(1, 1, 5), (1, 2, 3)\}$ と $P(17) = \{(1, 1, 8), (1, 2, 5)\}$ に対応する。簡単なプログラム^{*1}を用いて計算すれば

$$P(11) = \{(1, 1, 5), (1, 2, 3)\}, P(15) = \{(1, 1, 7), (1, 3, 3)\}, P(17) = \{(1, 1, 8), (1, 2, 5)\},$$

^{*1} 具体的には $1 \leq a \leq b \leq c \leq 50$ を満たすそれぞれの a, b, c について $ab + bc + ca$ を計算し、それを表に登録した。

$$\begin{aligned}
P(19) &= \{(1, 1, 9), (1, 3, 4)\}, P(23) = \{(1, 1, 11), (1, 2, 7), (1, 3, 5)\}, \\
P(27) &= \{(1, 1, 13), (1, 3, 6), (3, 3, 3)\}, \\
P(29) &= \{(1, 1, 14), (1, 2, 9), (1, 4, 5)\}, P(31) = \{(1, 1, 15), (1, 3, 7), (2, 3, 5)\}, \\
P(32) &= \{(1, 2, 10), (2, 2, 7), (2, 4, 4)\}, P(35) = \{(1, 1, 17), (1, 2, 11), (1, 3, 8), (1, 5, 5)\}, \\
P(44) &= \{(1, 2, 14), (1, 4, 8), (2, 2, 10), (2, 4, 6)\}, P(45) = \{(1, 1, 22), (2, 5, 5), (3, 3, 6)\}, \\
P(47) &= \{(1, 1, 23), (1, 2, 15), (1, 3, 11), (1, 5, 7), (3, 4, 5)\}, \\
P(56) &= \{(1, 2, 18), (2, 2, 13), (2, 3, 10), (2, 4, 8), (4, 4, 5)\}, \\
P(59) &= \{(1, 1, 29), (1, 2, 19), (1, 3, 14), (1, 4, 11), (1, 5, 9), (2, 5, 7)\}, \\
P(68) &= \{(1, 2, 22), (2, 2, 16), (2, 4, 10), (2, 6, 7), (3, 4, 8)\}, \\
P(75) &= \{(1, 1, 37), (1, 3, 18), (3, 3, 11), (3, 4, 9), (5, 5, 5)\}
\end{aligned}$$

といった結果をえることができる。

3 辺の長さが a, b, c である直方体を B とする。すると大きさ $a \times b$, $b \times c$, $c \times a$ の長方形の面がそれぞれ 2 枚ずつ存在する。それぞれの長方形を単位正方形の集まりであるとする。つまり B は $2(ab + bc + ca)$ 個の単位正方形で構成される。このとき B の双対グラフ $G(B) = (V, E)$ を次のように定義する。頂点集合 V は $2(ab + bc + ca)$ 個の単位正方形であり、単位正方形 u と v が辺 $\{u, v\} \in E$ でつながれている必要十分条件は u と v が B 上で辺を共有する、つまり B 上で隣接していることである。このとき $G(B)$ は $2(ab + bc + ca)$ 頂点からなる 4 正則グラフであり、したがって $|E| = 4(ab + bc + ca)$ が成立する。 $G(B)$ に関して次の補題が得られる。

補題 1 与えられた B に対して、 $G(B)$ の全域木を T とする。 T に入らない辺 $\{u, v\}$ のそれぞれに対して、 B 上の単位正方形 u と v の間の辺を切る。すると B の展開図 P が得られる。

証明: T は連結なので、辺を切り開いた結果、 B が非連結になることはない。また B の角の部分は $G(B)$ 上では長さ 3 の閉路になる。 T は閉路を含まないので、 P では角が切り開かれているはずである。したがって P は B の展開図である。□

したがって任意の直方体 B に対して B の展開図 P を作ることができる。このとき全域木 T が P を生成するというようにする。

ここで全域木は必ずしも展開図の表現として適切ではない。なぜなら展開図が大きな長方形を含んでいた場合、ここに不要なカットが入ってしまうためである。以下の補題を用いればこの問題に対処することができる。

補題 2 直方体 B を折れる多角形を P とする。 P が図 1 の A, D のように間に切れ目のある 2 個の単位正方形を含んでいたとする。より正確には、 $G(B)$ に含まれる長さ 4 のサイクル (A, B, C, D, A) のうちの 3 本の辺に対応する B 上の辺 (図中では AB 間, BC 間, CD 間) は P では切られておらず、かつ 1 本の辺に対応する B 上の辺 (図中 AD 間) だけが切られているとする。このとき、これを糊付けした P' もやはり B を折ることができる。

証明: B は閉じた凸多面体なので、 P' が B を折れないとすると、 A と D の間に別の単

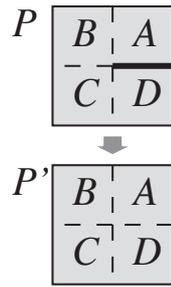


図1 糊付け

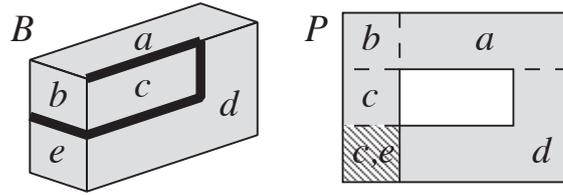


図2 単純でない多角形による展開図

位正方形が入らなければならない。しかしこのとき、周囲に5個以上の単位正方形が集まる頂点が発生する。こうした頂点があると、直交する凸多面体 B を折ることができない。したがって A と D の間には別の単位正方形は入らず、 A と D を糊付けしても P と同じ立体を作ることができる。□

補題2の糊付けを繰り返せば、 P から同じ辺を連続して2回なぞる部分を取り除くことができる。その結果得られる P は不要なカットを含まない。よって以下では、多角形は図1のような「連続した辺が同じ部分を2回なぞる部分」は存在しないと仮定する。

直方体 B を折れる多角形を P とする。 P を平坦に広げたときに2個の単位正方形 s_1 と s_2 が重なるならば、 P は重なりをもつという。また P を平坦に広げたときに2個の単位正方形 s_1 と s_2 が辺を共有し、かつ s_1 と s_2 が B 上で隣接しないとき、 s_1 と s_2 は接触し、 P は接辺をもつという。 P が重なりを持たず、接辺ももたないとき、 P を単純であるという。直方体の展開図はすべて単純であると思うかもしれないが、そうではない。

補題3 B を直方体として、 P をその展開図とする。このとき P は必ずしも単純ではない。

証明: サイズ $1 \times 2 \times 3$ の直方体を B とする。図2に示した B の(半分の)展開図 P を考える。このとき P は B の展開図(の一部)であるが、重なりをもつ。なお b と e のかわりに d と e の間を切れば、接触する展開図もえられる。□

直方体 B を折れる単純展開図 P を特徴づけるため、いくつかの記法を導入する。記述を単純にするため、多角形 P を通常の0/1行列で自然に表現したと考える。多角形 P を平坦に広げて0/1行列で表現したものを P の影 P' とする。つまり P' は P の重なりを無視して、接辺をつないで得られる図形である。このとき P' の表現の0と1の間、つまり P' の内部と外部の境を境界辺とよぶ。与えられた境界辺 e に対して P' 上で e を含む境界辺の集合を考えると、これはもっとも外側にある1つの外部境界辺と、それ以外の任意の個数の内部境界辺にわけることができる。このとき内部境界辺で囲まれた領域を穴とよぶ。本論文では8近傍を仮定する。つまり図5の4個目の多角形は内部境界辺をもたず、右下の部分は穴ではなく、図2の P の影は穴を1個もつ。

定理4 直方体 B の展開図を P とする。補題2より P は不要なカットを含まないと仮定

する. P を平面上に広げたときの P の影を P' とする. このとき P の面積と P' の面積が等しく, かつ P' が穴を含まなければ, P は単純な展開図である.

証明: まず P が重なりをもつ場合を考える. 明らかに P が重なりをもつ必要十分条件は P' の面積が P よりも小さくなることである. したがって以下では P の面積と P' の面積は等しいと仮定する. あとは P が接辺をもてば P' が穴をもつことを示せばよい.

背理法で示すため, P' が穴をもたなかったと仮定する. P' の任意の外部境界辺を e_1 とする. e_1 を始点とする P の外周境界辺の列を $e_1, e_2, \dots, e_k, e_1$ とする. P は接辺をもつので, P を平面上に広げたときと同じ場所にくる 2 辺 e_i と e_j が存在する. このとき e_i と e_j は P' では外周境界辺ではない. P を平坦に配置して e_i と e_j が同じ場所にくるので, $i < i' < j < j'$ を満たしてかつ $e_{i'}$ と $e_{j'}$ が同じ場所にくるような i', j' は存在しない. なぜならこのとき, $e_{j'}$ は外周辺となり, $e_{i'}$ は外周辺とならないからである. したがって, 極小なペア $i < j$ が存在する. つまり $i < i' < j' < j$ を満たしてかつ $e_{i'}$ と $e_{j'}$ が同じ場所にくるような i', j' は存在しない. このとき補題 2 より $i+1 < j$ である. また e_i と e_j の間には P' 上での外周境界辺はなく, P' の外周境界辺は e_1, \dots, e_{i-1} と e_{j+1}, \dots, e_k に含まれると考えてよい. ここで辺 e_{i+1} と e_{j-1} に注目する (図 3). e_i と e_j は接触に関し

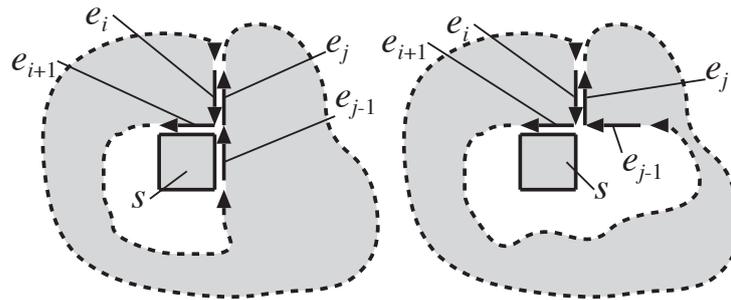


図 3 辺 e_i と e_j における接触.

て極小なペアなので, e_{i+1} と e_{j-1} は別の場所に置かれる. これらは単位正方形の辺なので, 3 通りの可能性が考えられる. 図 3 にそのうちの 2 通りを図示した. 最後の場合は最初の場合と対称なので省略する. さて, 背理法の仮定より P' は穴を持たないのであった. したがってどの場合においても e_i に隣接しないで e_{i+1} に隣接する単位正方形 s が必要である (図 3). s の辺のうちで e_{i+1} と同じ場所に置かれるものを e_t とする. すると e_t と e_{i+1} は接触し, かつ $i < i+1 < j$ なので, i と j が極小なペアであるという仮定に反する. したがってこの場所における単位正方形 s は存在せず, P' は穴をもつ. \square

データ表現の観点から見ると, 補題 2 と定理 4 より, 展開図は通常の 0/1 行列で自然な形で表せばよいことがわかる. つまり不要なカットは補題 2 から自然に除去され, 単純性は定理 4 より面積と穴の有無だけをチェックすればよい.

```

入力:  $|P(S)| > 1$  を満たす  $S$ ;
出力: 複数の直方体を折れる面積  $2S$  の展開図;
1 ハッシュ表  $H$  をクリア;
2 while 1 do
3    $P(S)$  の要素  $t = (a, b, c)$  をランダムに選ぶ;
4   サイズ  $a \times b \times c$  の直方体  $B$  の双対グラフ  $G(B)$  の全域木をランダムに生成;
5   全域木  $T$  に対応する多角形  $P$  を 0/1 行列で表現;
6   if  $t \neq t'$  を満たす  $(t', P)$  が  $H$  に含まれている then  $P$  (と対応する辺のサイズ) を出力;
7   if  $P$  が  $H$  に未登録 then  $(t, P)$  を  $H$  に登録;
8 end

```

図4 全域木を使って展開図を生成するアルゴリズム

3 確率的なアルゴリズム

本節では 2 種類の確率的なアルゴリズムとその実行結果を示す。

3.1 全域木を生成するアルゴリズム

1 番目のアルゴリズムは、与えられた複数の直方体の全域木をランダムに生成し、そこから展開図を生成し、これを巨大なハッシュ表を用いて登録・検査する。アルゴリズムの詳細は図4の通り。

本アルゴリズムでは 2 個以上の直方体に共有される展開図を見つけるのが目的だったので、以下の 2 個の欠点にはあえて対処していない：まず、多角形は一様ランダムに生成されるわけではない。そして多角形は必ずしも単純であるとは限らない。実験結果によると、これらの欠点はそれほど致命的ではなかった。本アルゴリズムによって 2165 個の出力がえられたが、そのうち 2139 個は単純多角形、つまり求める解であり、26 個が解として認められない単純でない多角形であった。アルゴリズム的な観点からいえば、単純でない多角形を出力しないようにするのは簡単である。具体的には定理 4 より、まず面積を調べたあとで穴をもつ多角形を排除すればよく、この判定問題は線形時間で解けることが知られている。(例えば浅野・田中によるアルゴリズムは、この問題を定数領域だけを使用して線形時間で解くことができる [5].) 解を出力するときこの判定を行って、解でないものを抑制すればよい。

3.1.1 1 番目のアルゴリズムの実験結果

全域木を生成するアルゴリズムを通常のラップトップコンピュータ (IBM ThinkPad X40: メモリは 1.5GB で 1CPU) で実行すると、1 時間で約 3×10^6 個の展開図を生成し、 $P(11)$ に対して 100 個程度の解を出力した。そこで次にスーパーコンピュータ (SGI Altix 4700: メモリは 2305GB で 96CPU) を使用した。なお乱数の生成にはメル

表1 1番目のアルゴリズムの実験結果

$2S(S)$	$ P(S) $	RG($\times 10^7$)	タイプ	Sols	Errs
22(11)	2	6.7	(1,1,5),(1,2,3)	541	15
30(15)	2	18.6	(1,1,7),(1,3,3)	72	1
34(17)	2	28.4	(1,1,8),(1,2,5)	708	0
38(19)	2	30.4	(1,1,9),(1,3,4)	41	0
46(23)	3	191.0	(1,1,11),(1,3,5)	568	3
			(1,2,7),(1,3,5)	92	5
54(27)	3	126.7	(1,1,13),(3,3,3)	2	0
			(1,3,6),(3,3,3)	1	0
58(29)	3	89.3	(1,1,14),(1,4,5)	37	0
62(31)	3	82.4	(1,3,7),(2,3,5)	5	0
64(32)	3	204.8	(1,2,10),(2,2,7)	50	2
			(2,2,7),(2,4,4)	6	0
70(35)	4	91.3	(1,1,17),(1,5,5)	3	0
			(1,2,11),(1,3,8)	11	0
88(44)	4	217.0	(2,2,10),(1,4,8)	2	0
90(45)	3	34.6		0	0
94(47)	5	51.3		0	0
112(56)	5	36.0		0	0
118(59)	6	35.5		0	0
合計	-	-	-	2139	26

センヌ・ツイスター法^{*2}を用いた。実験結果を表1に示す。表中の「 $2S(S)$ 」は多角形のサイズ（の半分）、「 $|P(S)|$ 」は可能な直方体の種類、「RG」はランダム生成の回数、「Sols」は2個の直方体を折れる正しい解（単純多角形）の数、「Errs」は単純でない多角形の数である。例えば $P(11)$ の欄であれば、アルゴリズムは大きさ (1, 1, 5) または (1, 2, 3) の直方体に対して約 6.7×10^7 個の展開図を生成し、556 個の多角形をえた。このうち 15 個は穴のある多角形であり、残りの 541 個が大きさ (1, 1, 5) の直方体と大きさ (1, 2, 3) の直方体とともに折れる（単純な）展開図である。全体を合計すると、2 個の直方体を折れる単純な展開図を 2139 個えることができた。各種パラメータごとのプログラムはスーパーコンピュータの上で適宜並列に実行され、数日から数週間実行された。そしてプロセスがあまりにもメモリを使い過ぎていると判断した場合に適宜実行を中止した。得られた解の一部を図5に示す。本アルゴリズムでえられた解はすべて <http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html> で公開されている。

^{*2} <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html>

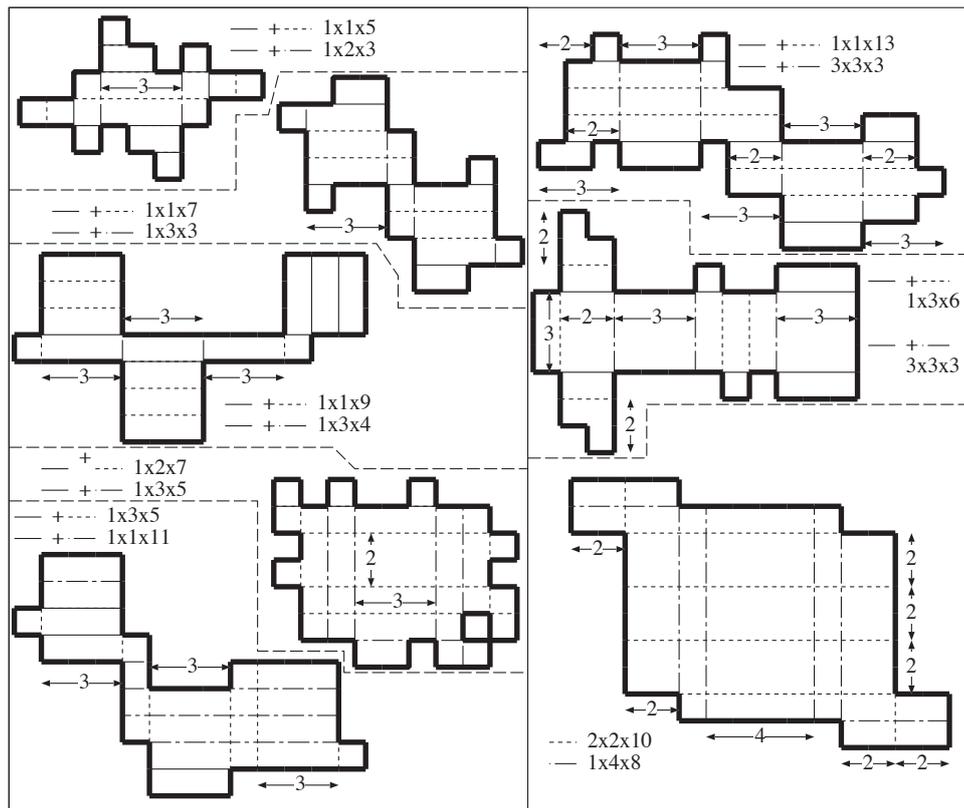


図5 得られた解の一部.

3.2 並列に展開するアルゴリズム

1番目のアルゴリズムは全域木をランダムに生成するものであったが、そのため、より大きな連結な領域を含む「太い」展開図の方が、そうでない「細い」展開図よりも高い確率で生成されてしまう。したがって生成される展開図の分布に大きな偏りがある。そこでまったく別のアイデアに基づくアルゴリズムも開発した。2番目のアルゴリズムは、まずターゲットとなる同じ表面積をもつ複数の直方体を始めに決める。これを B_1 , B_2 とする。そしてアルゴリズムは B_1 上の単位正方形 s_1^1 と B_2 上の単位正方形 s_2^1 を一様ランダムに決める。これらの単位正方形はランダムに決められる「方向」をもつ。2つの正方形 s_1^1 と s_2^1 は、共通の展開図上の同じ正方形に対応しているとみなす。アルゴリズムは、この B_1 と B_2 の共通の部分展開図 P を次の手順で同時に成長させていく：まず、現在の P の外周辺 e をチェックする。辺 e において P の隣に位置する単位正方形を s とすると、 B_1 上の対応する単位正方形 s' と B_2 上の対応する単位正方形 s'' とを特定することができる。これらが B_1 上でも B_2 上でも、どちらもまだ P に属していないとき、この辺 e を拡張可能であるという。アルゴリズムは P の拡張可能な辺を調べ、これらの中から一様ランダムに e を選び、単位正方形 s を e の位置で P に追加する。このプロセスは、以下の2通りの場合に停止する。まず P がすべての単位正方形を含み、 B_1 や B_2 の表面積と同じ面積になったら、 P は求める展開図なので出力して停止すればよい。一方、その前に

- 入力: $|P(S)| > 1$ を満たす S ;
出力: 2 個の直方体を折れる面積 $2S$ の多角形;
- 1 $P(S)$ からタイプ $t_1 = (a_1, b_1, c_1)$ とタイプ $t_2 = (a_2, b_2, c_2)$ を選ぶ;
 - 2 タイプ t_1 の直方体 B_1 上の単位正方形 s_1^1 と, タイプ t_2 の直方体 B_2 上の単位正方形 s_2^1 を一様ランダムに選ぶ;
 - 3 s_1^1 と s_2^1 を多角形 P の中の同じ単位正方形と見なして P を初期化する;
 - 4 **repeat**
 - 5 P の外周のそれぞれの辺 e に対して, 拡張可能かどうかを調べる;
 - 6 **if** 拡張可能な辺が存在しない **then** 探索失敗であることを出力して停止;
 - 7 拡張可能な辺 e を一様ランダムに選ぶ;
 - 8 単位正方形 s を辺 e の所で P に接続する;
 - 9 **until** B_1 や B_2 の単位正方形がすべて P に接続されるまで繰り返す ;
 - 10 P を出力する.

図 6 並列に展開図を生成するアルゴリズム

拡張可能な辺がなくなってしまうたら, これは解の探索に失敗したので, その旨を出力して停止する. アルゴリズムを詳しく書くと図 6 の通りである.

3.2.1 2 番目のアルゴリズムの実験結果

表 2 2 番目のアルゴリズムの実験結果

$2S(S)$	タイプ	計算時間 (秒)	Sols	Errs
22(11)	(1,1,5),(1,2,3)	100	1863	13
30(15)	(1,1,7),(1,3,3)	155	370	0
34(17)	(1,1,8),(1,2,5)	191	3705	1
38(19)	(1,1,9),(1,3,4)	213	914	0
54(27)	(1,1,13),(3,3,3)	352	690	1
54(27)	(1,1,13),(1,3,6)	351	717	1
54(27)	(1,3,6),(3,3,3)	477	243	3
88(44)	(1,4,8),(2,2,10)	1007	153	0
88(44)	(2,2,10),(2,4,6)	967	86	1
合計	-	3813	8741	20

2 番目のアルゴリズムはノートパソコン (Intel Core2 Duo CPU T9900 3.06GHz Windows 7) の上で実行された. またそれぞれのサイズについて, プログラムは 1×10^7 回実行された. 実験結果は表 2 の通りである. それぞれのエントリは表 1 に準じる. 例えばプログラムは $P(17)$ に対して 1×10^7 回試行して, サイズ $1 \times 1 \times 8$ の直方体とサイズ $1 \times 2 \times 5$ の直方体をどちらも折れる単純な展開図を 3705 個と, 単純でない展開図を 1 個見つけた. またこのときの実行時間は 191 秒であった. 2 種類の異なる直方体が折れる単純な展開図を合計 8741 個見つけることができた.

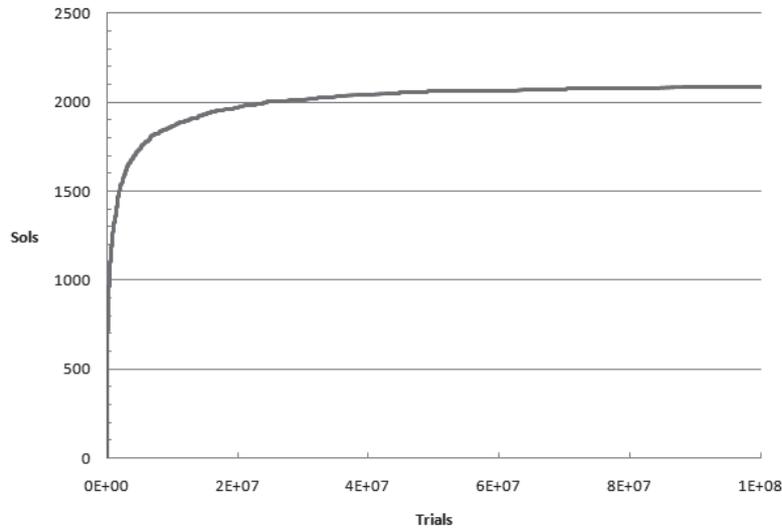


図 7 $P(11)$ に対する試行の回数と解の個数のグラフ.

$P(11)$ に対する試行の回数とその試行で見つかった解の個数をグラフにすると図 7 の通りである. このグラフを観測すると, サイズ $1 \times 1 \times 5$ の直方体とサイズ $1 \times 2 \times 3$ の直方体をどちらも折れる展開図の数は概ね 2000 個強程度であろうと予想される^{*3}.

■注意 面積を与える S の値は互いに独立というわけではない. 単位正方形を 4 個の正方形に分割すれば, 例えば $P(11)$ の解から $P(44)$ の解を作成することができる. 例えば 1 番目のアルゴリズムは $P(11)$ に対して 6.7×10^7 回のランダム生成を (3 日間で) 行い, 541 個の解を出力した. 一方 $P(44)$ に対しては 217.0×10^7 回のランダム生成を (約 1 ヶ月間かけて) 行って, わずか 2 個しか解が得られなかった. また, これらの実験を通じて, 3 個 (あるいはそれ以上) の異なる直方体を折ることのできる多角形は 1 つも得られなかった.

4 特別な性質をもつ展開図

本節では, 3 節で生成した展開図の中で, 特別な性質をもつものを示す.

■タイリング 平面を埋めつくすことのできる図形をタイリングとよぶ. 得られた解の中にはタイリングが存在する. 図 8 に示した多角形はタイリングであり, しかもサイズ $1 \times 1 \times 8$ の直方体とサイズ $1 \times 2 \times 5$ の直方体を折ることができる.

加納らは, 展開図が平面を埋めつくし, そこから作られる立体が空間を埋めつくすという性質をもった図形 (正確には展開図と立体のペア) をダブル充填図形 (double packable solid) と名付けている [4, Section 3.5.2]. 任意の直方体は空間を充填するので, 図 8 は 2

^{*3} [2011 年 4 月付記] 同アルゴリズムで 1 億回試行した結果, 2085 個の展開図を発見した. また松井寛彰・上原隆平による全探索の結果, サイズ $1 \times 1 \times 5$ の直方体とサイズ $1 \times 2 \times 3$ の直方体をどちらも折れる展開図の個数は 2263 個であることが判明している.

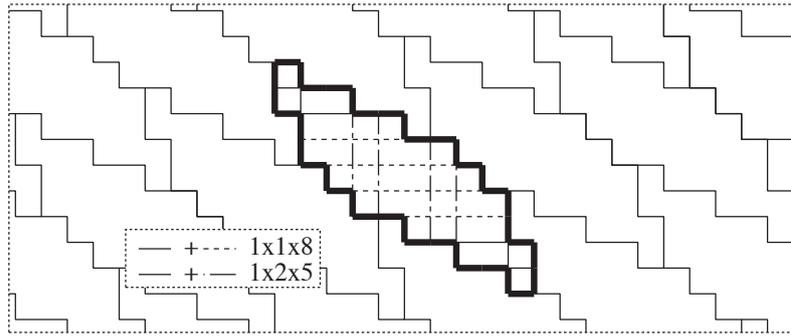


図8 サイズ $1 \times 1 \times 8$ とサイズ $1 \times 2 \times 5$ の2種類の直方体が折れるタイリング.

種類のダブル充填図形を与える.

■交差しないパターン 工学的には折り線同士が互いに交差しない方が望ましい. 図5の3番目の展開図と最後から2番目の展開図はこうした性質を満たす. また [2] の既存の結果もこの性質を満たす.

■独立な折り目パターン 工学的な見地からは, 2通りの折り方を実現する折り線が互いに独立で共通部分を持たない方が望ましい. 図5の最後の展開図はこうした性質を満たす.

折り線が独立でかつ交差しない展開図があるかどうかは, チェックしていない.

5 無限種類の展開図

本節では, 2種類の異なる直方体を折れる展開図が無限に存在することを示す^{*4}. 実験で得られた展開図より, 以下の一般化定理が得られる.

定理 5 任意の正整数 j と k に対して, サイズ $1 \times 1 \times (2(j+1)(k+1)+3)$ の直方体とサイズ $1 \times j \times (4k+5)$ の直方体を折れる展開図が存在する.

証明: 与えられた正整数 j と k に対して, 図9の多角形が条件を満たすことを示す. それぞれの直方体の折り方は図8の折り方と同様である. はじめのパラメータ j は図9の長方形の幅を決定するだけなので, 2通りの直方体の折り方には影響がない. 2番目のパラメータ k に対しては, 図9の左側の多角形領域をコピーして複製し, グレーの領域が重なるように貼りつけ, これを k 回繰り返す. すると, それぞれの k に対して2通りの折り方が存在する. 一方はどれも本質的に同じで, 垂直方向に4個の単位正方形を巻くように折り, サイズ $1 \times 1 \times (2(j+1)(k+1)+3)$ の直方体をえる. もう一方は, k に応じて全体を水平方向に k 回螺旋状にねじるように折っていく. この折りによってサイズ

^{*4} ここで異なる直方体とは, 2個の直方体の辺の長さを $a \times b \times c$, $a' \times b' \times c'$ としたときに, $\gcd(a, b, c, a', b', c') = 1$ が成立するものと定義する. これ例えば $a \times b \times c$ と $2a \times 2b \times 2c$ といった自明な解を排除できる.

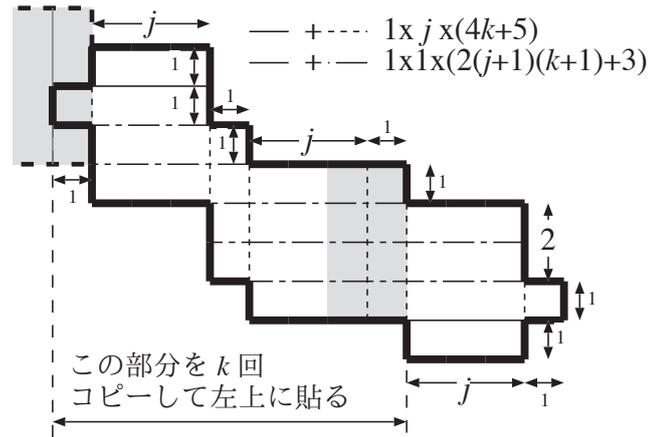


図9 サイズ $1 \times 1 \times (2(j+1)(k+1)+3)$ の直方体とサイズ $1 \times j \times (4k+5)$ の直方体が折れる展開図.

$1 \times j \times (4k+5)$ の直方体がえられる. □

系 6 異なる 2 種類の直方体を折れる直交展開図は無限に存在する.

6 一般化

$S < 11$ のときには $|P(S)| \leq 1$ なので、2 個の異なる直方体が折れる直交展開図で面積が 22 未満のものは存在しない. しかし「同型」の直方体も許せば、より小さい解が存在する. 図 10 がそれであり、同型の直方体を 3 通りの異なる方法で折ることができる (太線は糊付け線). 単位立方体には 11 種類の異なる展開図があることがよく知られている

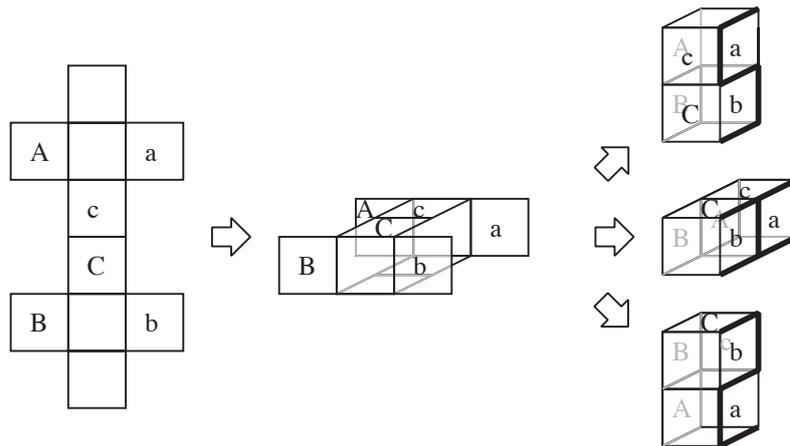


図 10 異なる 3 通りの折り方をもつ展開図.

が、これらはどれも折り方は一意的である. したがって図 10 は複数の折り方が存在する面積最小の展開図である.

次に複数の同型でない直交多面体を折る展開図で、必ずしも凸でない多面体を許した場合を考える。この場合は、面積 18 で 7 種類の異なる（これは可能なものすべてでもある）直交多面体を折れる多角形がすでに知られている。これはミラー (G. Miller) とクヌース (D. E. Knuth) によって考案され、「キュービガミ 7」という名前のパズルとして市販されている (図 11 と図 12)。このパズルは 2005 年のワールドパズルコンテストで佳

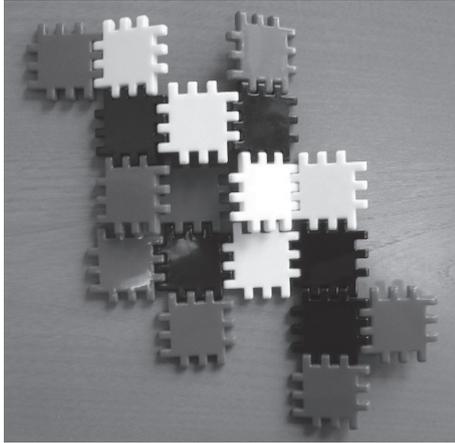


図 11 キュービガミ 7.

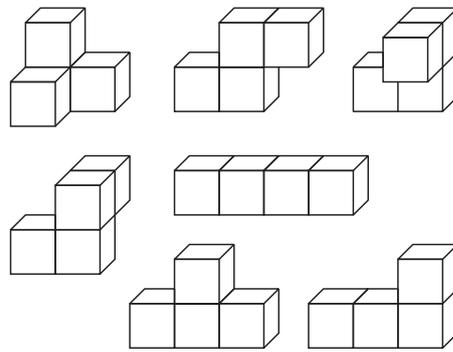


図 12 面積 18 の 7 種類の直交多面体.

作を受賞した (詳しくは <http://www.puzzlepalace.com/resources/t9/index.html> を参照のこと).

キュービガミは単純展開図ではない (なお補題 2 は凸多面体にのみ有効である) が、クヌースの結果によると、この 7 種類の直交多面体を折れる単純展開図は 68 個存在する。本論文の 2 番目のアルゴリズムでも、 1×10^8 回の試行で図 13 に示す解がえられた。「与

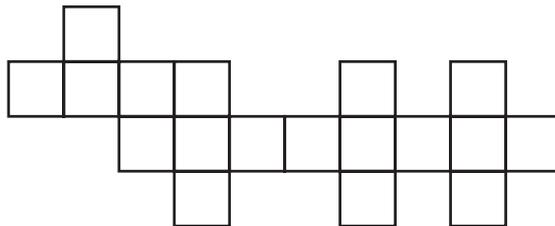


図 13 7 種類の直交多面体を折る単純展開図.

えられた面積をもつ直交多面体をすべて折れる展開図」という意味ではキュービガミは面積最小の解ではない。図 10 を拡張して得られる図 14 の展開図が最小の解である。表面積 10 の直交多面体は図 10 の 1 つしかなく、表面積 14 の直交多面体は図 14 の 2 つしかない。したがってこれを (3 通りの方法で) 折れる展開図は面積最小の解である。

では任意の個数の直交多面体を折れる展開図は存在するのであろうか。この自然な問いに対する解答を以下で与える。

定理 7 任意の正整数 k に対して、 k 個以上の異なる直交多面体を折れる単純な展開図が

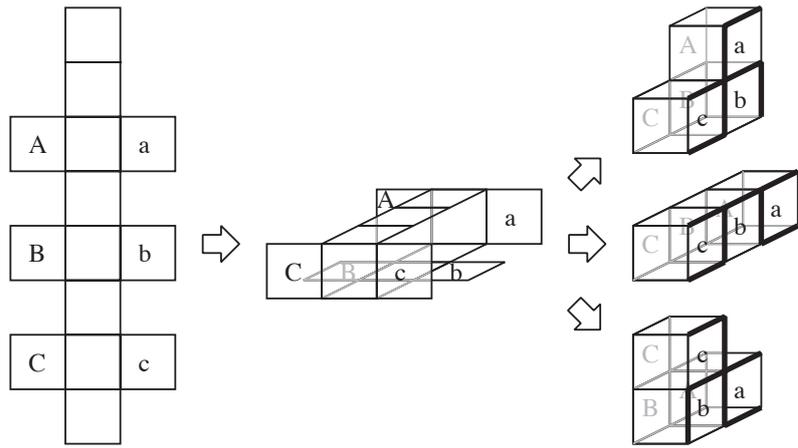


図 14 直交多面体を 3 通りの折り方で折れる展開図

存在する.

証明: ここでは図 15(a) に示したサイズ $1 \times 1 \times 8$ とサイズ $1 \times 2 \times 5$ の直方体を折れる展開図を部品として用いる. 図 15(a) の黒い正方形は「フタ」とよぶことにする. こ

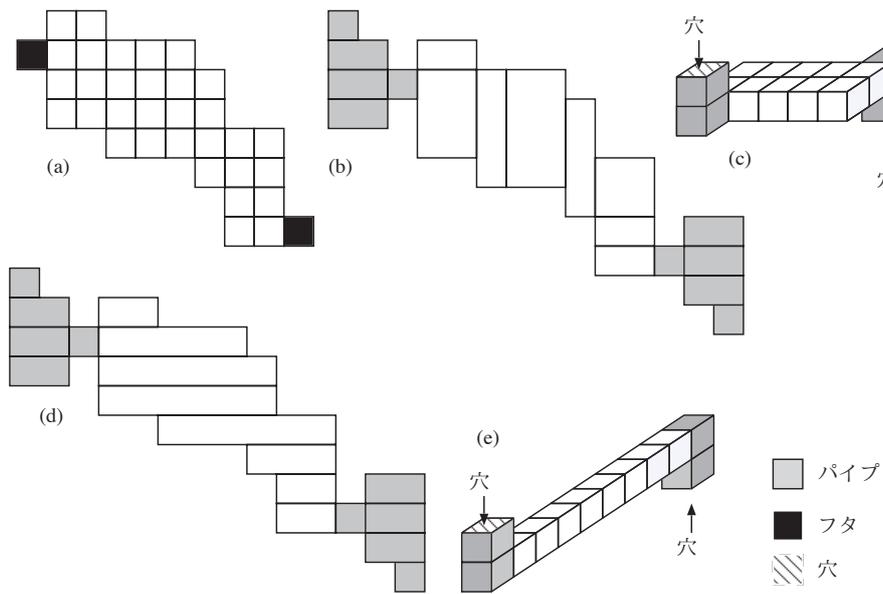


図 15 多面体を連結するための部品.

これは 2 通りの直方体のどちらにおいても反対側の面に配置される. 図 15(b-e) に灰色で示した部品は「パイプ」とよぶことにする. 2 つのフタをパイプで置き換えれば, どちらの直方体においても図 15(c)(e) のように反対側の面に「穴」を作ることができる. この部品を k' 個用意して, つなぎあわせる. このとき両端の部品の最後のパイプはフタにしておけばよい. 図 $k' = 3$ の例を図 16 に示す. パイプやフタはどちらの直方体においても反対側に配置されるので, それぞれの展開図は独立にサイズ $1 \times 1 \times 8$ の直方体やサイズ $1 \times 2 \times 5$ の直方体を折ることができる. したがって全部で $2^{k'}$ 通りの多面体が

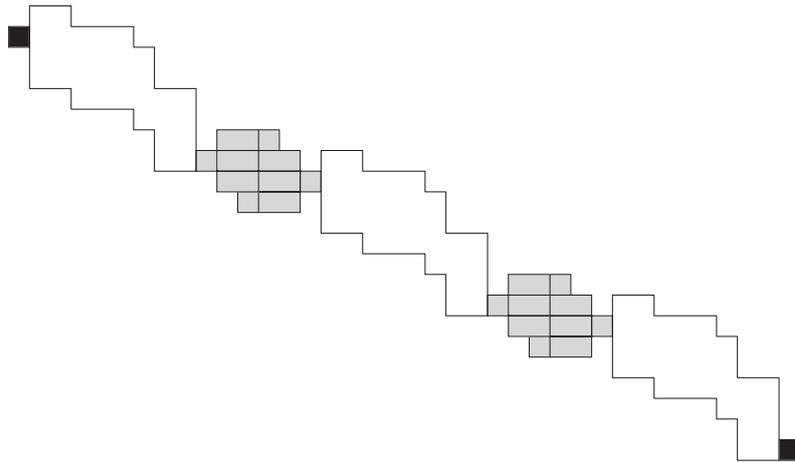


図 16 3 個の部品をつなぎあわせた展開図.

折れるが、このうち $2^{\lceil k'/2 \rceil}$ は反転に関して対称である。したがってこの展開図からは $(2^{k'} - 2^{\lceil k'/2 \rceil})/2 + 2^{\lceil k'/2 \rceil} = 2^{k'-1} + 2^{\lceil k'/2 \rceil - 1}$ 通りの異なる直交多面体を折ることができる。(よって例えば図 16 の展開図では $4 + 2 = 6$ 通りの異なる直交多面体が折れる。) k' を十分大きくすれば定理をえる。 \square

7 おわりに

理論的な観点からは、与えられたサイズ $a \times b \times c$ の直方体の展開図の列挙、あるいは一様ランダムな生成は興味深い問題である。これはクヌースによる研究 (詳細は <http://www.puzzlepalace.com/resources/t9/index.html> を参照のこと) の拡張でもある。しかしこれらのアルゴリズムは、必ずしも複数の直交直方体を折れる展開図の発見に対して有用であるとは限らない。むしろ「望ましい」形の多角形を発見的な手法で探索した方が効率が良いかもしれない。3 個あるいはそれ以上の直方体を折れる展開図が存在するかどうかは、未解決問題である。著者らは存在すると考えている。なお実験を通じて、解答に「とても近い」多角形が見つかっている。図 17 の展開図は、サイズ $1 \times 1 \times 17$ の直方体とサイズ $1 \times 5 \times 5$ の直方体を (図 9 と同様の折り方で) 折れる。しかもサイズ $1 \times 3 \times 8$ の直方体を、わずか 2 箇所の重なりを許すだけで折ることができる。(面積はどれも同じなので、折られた直方体には 2 箇所の穴が残る。) 具体的には、図 17 の展開図をサイズ $1 \times 3 \times 8$ の直方体に折るには、 a を a' に重ねて、 b を b' に重ねればよい。(ただし a と a' の間には切込みが必要である。)

謝辞

以下の人々に感謝する。北陸先端科学技術大学院大学で講演をしてくれたジョセフ・オルーク (Joseph O'Rourke) 氏。彼の講演とそれに続くディスカッションは、第 1 著者がこの研究に取り組むきっかけとなった。入手が難しい研究ノート [2] を著者らに送ってく

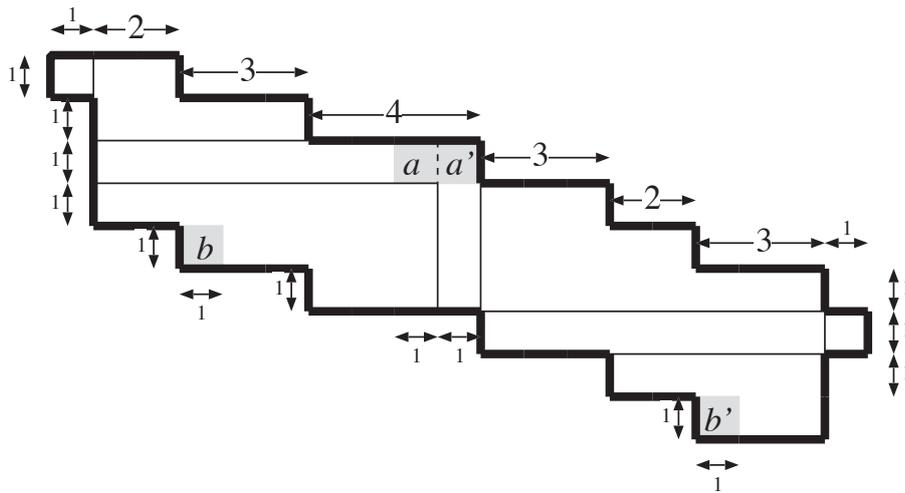


図 17 サイズ $1 \times 1 \times 17$ の直方体とサイズ $1 \times 5 \times 5$ の直方体を折れる展開図で、サイズ $1 \times 3 \times 8$ の直方体の展開図に「とても近い」もの。

れたエリック・ドメイン (Erik Demaine) 氏. 図 15・図 16 の「複数の直方体をつなぐ」というアイデアは岡本吉央氏の助言による. 図 9 の展開図の j もパラメータにできることを指摘してくれたのはステファン・ランゲーマン (Stefan Langerman) 氏である. またウェブサイト (<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index.html>) で公開していた解をプログラムで再検証し, いくつかのエラーを見つけてくれた伊藤剛志氏にも感謝する.

参考文献

- [1] Lubiw, A. and O'Rourke, J. When Can a Polygon Fold to a Polytope? Technical Report Technical Report 048, Department of Computer Science, Smith College, 1996.
- [2] Biedl, T., Chan T., Demaine, E. D., Demaine, M. L., Lubiw, A., Munro, J. I., and Shallit J. Notes from the University of Waterloo Algorithmic Problem Session. Sept. 8 1999.
- [3] Demaine, E. D. and O'Rourke, J. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007. (邦訳:『幾何的な折りアルゴリズム』上原隆平訳, 近代科学社, 2009年.)
- [4] Kano, M., Ruiz, M.-J. P., and Urrutia, J. Jin Akiyama: A Friend and His Mathematics. *Graphs and Combinatorics*, 23[Suppl]:1–39, 2007.
- [5] Asano, T. and Tanaka H., Constant-Working Space Algorithm for Connected Components Labeling *IEICE Technical Report*, COMP2008-1:1–8, 2008.
- [6] Mitani, J. and Uehara, R., “Polygons Folding to Plural Incongruent Orthogonal Boxes”, *Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2008)*, pp. 39-42, 2008.