論文名 Title	折り紙における判定不能問題	Undecidable Problem in Origami
著者 Author(s)	上原隆平	Ryuhei Uehara
受理年月日 Date of acceptance	2010/8/17	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2011/05/20 Vol. 1 No. 1 page 40-45	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

折り紙における判定不能問題

上原隆平
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
〒923-1292 石川県能美市旭台 1-1
uehara@jaist.ac.jp

An Undecidable Problem in Origami

Ryuhei Uehara
School of Information Science, JAIST
Asahidai 1-1, Nomi, Ishikawa 923-1292, Japan.

要約：近年「計算折り紙」としての折り紙に関心が高まっている．ある意味で，折り紙は計算のプラットフォームたりうる．このプラットフォーム上で，計算量理論に関する結果がいくつか得られている．例えばチューリング機械といった計算モデルでは判定不能問題が研究されており，そのモデルにおける計算能力の強さの逆説的な証拠としてとらえることができる．では計算折り紙モデルにおいて，こうした判定不能問題は存在するだろうか？本論文では，この疑問に対する肯定的な解答を与える．自然な計算折り紙モデルを定義すると，単純な判定問題が判定不能となる．

Abstract: Origami has recently attracted much attention as "computational origami". In a sense, origami can be seen as a platform of computation. Both of tractable and intractable results have been obtained on the platform. For a computation model like Turing machine, undecidable problems are a kind of paradoxical evidence of the computational power of the model. Then, is there any undecidable problem on computational origami model? In this paper, we give an affirmative answer. We show that a natural and simple decision problem in an origami computation model is undecidable.

Keywords: Computation model, diagonalization, undecidability.

1 はじめに

文献 [4] に代表される通り，「計算折り紙 (Computational Origami)」という用語は理論計算機科学，特に計算幾何学の分野で市民権を得つつある．Bern と Hayes による NP 困難性の証明 [1] 以来，計算量理論の観点から，手におえない問題がいくつか示されている．

こうした NP 困難性の証明では，ある種の計算問題（典型的には論理式の充足可能性問題）を折り紙の上の「計算」問題に還元している．その一方で，折り紙に関する実用的なソフトウエアも開発されている．中でも Lang による TreeMaker [2] は，折り紙設計の代表的なソフトウェアとして知られていて，そこでは多くの組合せ最適化問題が実用的な時間で解かれている．こうした分野では，折り紙はある意味で計算のプラットフォームとみなすことができる．つまり私たちは，紙の上で定義されたなんらかの基本演算（例えば藤田の公準や羽鳥の操作など）を使って，折ることでなんらかの点を「計算」していると考えられる．理論計算機科学分野では，計算モデルとしてチューリング機械がよく用いられるが，これは本質的に帰納的関数と同等であることが知られている．こうした計算モデルは 1940 年前後に相次いで独立に考案されたにもかかわらず，どれも本質的に同じ計算能力を持つ．こうした自然で強力な計算モデルは，どれも共通の計算能力の限界をもつ．例えば以下にあげるのは非常に有名な「停止性判定問題」である：

入力： プログラムコード P とそれへの入力 x.
出力： プログラム P に入力 x を与えて実行したとき，$P(x)$ は有限ステップで停止するか？

停止性判定問題は単純であるが，判定不能問題である．すなわち，この問題にいつでも正しい解答を有限時間内に返してくれるプログラム Q は存在しない．（こうした結果は理論計算機科学ではいわゆる教科書レベルの非常に基本的な知識である．詳しくは例えば [3] などを参照のこと.）ゲーデルの不完全性定理以来，こうした計算能力の限界は，ある意味で計算システムの強力さを逆説的に証明してくれている．

では折り紙はどうだろうか？「計算折り紙」というある種の計算メカニズムは，こうした逆説的な限界をもつほどの計算能力があるのだろうか？本論文ではこの疑問に対する肯定的な解答を与える．具体的には，ある種の妥当性のある計算折り紙のモデルにおいて，以下の「折り判定問題」が自然で単純な判定不能問題であることを証明する．

入力： 折り紙とその上の 4 点 p, q, r, s.
出力： 以下の 2 条件を満たす 2 本の直線 ℓ_1 と ℓ_2 が存在するかどうかを判定せよ．(1) 3 点 p, q, r から有限回折ることで作れる．(2) 点 s で交差する．

ごく大雑把に言えば，折り判定問題は，与えられた 3 点 p, q, r だけを基準に使って，有限回で別の点 s を折れるかどうかを聞いているにすぎない．これは折り紙では極めて自然な問題であるが，判定不能である．ここではこの問題を単純化し，以下の 1 次元版の折り判定問題を考える．

入力： 線分とその上の 4 点 p, q, r, s.
出力： 3 点 p, q, r から始めて，有限回の折りで点 s に折り目をつけられるかどうかを判定せよ．

この単純化した問題もやはり判定不能問題である．2 次元平面における折り判定問題は 1 次元版の折り判定問題を完全に含んでいる．したがって本論文では 1 次元版だけを扱う．

2　計算モデルと判定不能性

1 次元折り紙 P とは有限長で太さ 0 の線分である．一般性を失うことなく，P の長さは 1 で最初は区間 $[0,1]$ に置かれていると仮定する．P 上の任意の点は区間 $[0,1]$ のある実数で表現される．つまり 1 次元折り紙 P 上の任意の点 p はある実数座標値をもつ．この座標値を $P(p)$ と表現する．また，曖昧でないときは折り紙 P の折り状態も P と表記し，P の左端はいつでも座標 0 に合わせられると仮定する．このとき折り状態 P 上の p の座標値も $P(p)$ と書く．これらの座標値が実数であることに注意する．これは本質的である．

2 次元折り紙の上では，藤田の公準と羽鳥の操作を合わせた 7 種類の基本操作を考えることが多い（詳細は例えば [4, Chapter 19] を参照のこと）．つまり折り紙の折りとは，これら 7 種類のうちの一つの操作を適用することであり，その結果，新しい線分を得て，この新しい線分とすでにある線分との間の交点が新しい点として生成される．1 次元折り紙では，可能な操作は以下の通り単純化される．(1) P 上にすでにある点 p に対する $P(p)$ を固定し，そこを中心に何枚かの紙の層を折りたたむ．この操作によって $P(p)$ と重なっていた紙に新しい点が生成される．(2) P 上にすでにある点 p に対する $P(p)$ を固定し，そこを中心に何枚かの紙の層を反対側に開く．この操作によって $P(p)$ と重なっていた紙に新しい点が生成されることもある．これらは本質的には同じ操作と見なすことができる．つまりすでにある点 $P(p)$ を中心にして，そこに重なっている紙を反対側にフリップして，新しい点 q を生成するという操作である．このとき $P(p)=P(q)$ が成立することに注意する．新しい点を生成するには，この操作しか許さない．

上記の操作についてもう少し詳しく考えてみる．1 次元版の折り判定問題では，4 個の実数点 p,q,r,s が与えられている．以下では一般性を失うことなく，$P(p)=0$, $P(q)=1$, $0<P(r)<1$, $0<P(s)<1$ と仮定する．また s をゴール点，p,q,r をスタート点と呼ぶ．本問題で許されている折り操作は，スタート点と，そこから生成される点に対する操作である．つまり s を折り操作の対象として使用することはできない．折り判定問題のゴールは，折り状態 P の上で $P(r')=P(s)$ が成立するような点 r' を有限回の操作で生成することである．新しい実数点 r' が得られたときには，$P(r')=P(s)$ という比較が無限の精度で行えることに注意する．（比較が失敗した場合は，$P(r')<P(s)$ か $P(r')>P(s)$ という結果が返ってくる．）つまりこのモデルでは，二つの実数点を無限の精度で（定数時間で）比較できると仮定している．以下，スタート点から生成される実数点を折り可能点と呼ぶ．

まず折り可能点の個数に関する定理を示す．

定理 1 1 次元の紙 P 上の 3 個のスタート点 p,q,r の座標を $P(p)=0$, $P(q)=1$, $0<P(r)<1$ とする．このとき折り可能点の個数は可算無限である．

証明: 集合 $S_0=\{p,q,r\}$ と $i>0$ に対して集合 S_i を以下で定義する：S_i が点 t を含む必要十分条件は，(1) t はスタート点から i 回の折り操作によって折ることができ，かつ (2) $t\notin\cup_{0\le j<i}S_j$ である．つまり S_i はちょうど i 回の折り操作によって初めて折ることがで

きる点の集合である．ここで任意の定数 i に対して，定数種類の折り操作を i 回行ったあとの P の折り状態は定数個である．したがって $|S_i|$ も定数個である．それぞれの S_i が含む点の個数は可算個なので，これを自然数 i に対してすべて加えた折り可能点の個数も可算無限個となる． $\square$

実数の集合は可算ではないという事実はよく知られている．したがって，定理 1 より，ひとたびスタート点が与えられたら，そこから有限回の操作では折ることのできない点が存在することがわかる．この事実を利用すると，以下の判定不能性を得る．

定理 2 折り判定問題はたとえ 1 次元折り紙モデルであっても判定不能である．

証明: 矛盾を導くために，折り判定問題を解くアルゴリズム A が存在すると仮定する．つまり A は，あらゆる入力 p, q, r, s に対して，いつでも有限時間内に “Yes” または “No” を出力する．ここで A はチューリング機械上で動作するなんらかのプログラミング言語で記述されていると考えてよい．したがって A を実現するプログラム $\mathcal{A}$ を一つ固定し，その実行時間を返す関数 $t_{\mathcal{A}}(p, q, r, s)$ を定義することができる．つまり任意の 4 個の実数 p, q, r, s に対し，プログラム $\mathcal{A}$ に入力 (p, q, r, s) を与えたとき，“Yes” または “No” を返すまでに実行するステップ数が $t_{\mathcal{A}}(p, q, r, s)$ である．仮定により，$t_{\mathcal{A}}(p, q, r, s)$ は条件を満たすどんな実数に対しても有限である．

ここでスタート点 p, q, r を $p = 0,\ q = 1,\ r = 1/\sqrt{2}$ と固定する．そして実数点 s の集合 T_i を $T_i = \{s \mid t_{\mathcal{A}}(p, q, r, s) = i\}$ で定義する．つまり T_i は i ステップで判定することのできる実数点の集合である．ここで $|T_i|$ が可算であることを示す．まず T_i が 2 種類の点を含むことに注意する．T_i のうち，$\mathcal{A}$ が “Yes” と答える点の集合を Y_i とし，“No” と答える点の集合を N_i とする．ここで定義より，$\mathcal{A}$ が点 s に対して i ステップ目で “Yes” と答えるのは，$s' \in Y_{i'}$ を満たす s' と $i' < i$ が存在し，i ステップ目で s' を s に重ねたときである．したがって明らかに Y_i は可算集合（しかも有限集合）である．よってあとは N_i も可算であることを示せばよい．もし N_i が非可算無限個の点を含むのであれば，どこかに内部の点がすべて N_i に含まれるような開区間 (a, b) が存在する．（さもなくばすべての N_i の点は孤立してして，小さい順に番号がつけられるので可算となる．）ここで $a' = p = 0,\ b' = q = 1$ とおくと，$0 = a' < a < b < b' = 1$ で，しかも a' と b' はどちらも折れる点である．さて a' と b' を重ねて折って，新しい点 $c(= 1/2)$ を生成する．もし $a < c < b$ ならば，c は “Yes” の例なので矛盾である．したがって $a' < c \leq a < b < b'$ または $a' < a < b \leq c < b'$ である．前者の場合は c を新たな a' とし，後者の場合は c を新たな b' とする．このプロセスを繰り返すと，有限回（正確には $O(\log_2(1/(b - a)))$ 回）の操作の後に，必ず (a, b) の区間の内部に新しい折り目をつけることができる．しかしこれは開区間 (a, b) の内部の点がすべて N_i に含まれるという仮定に矛盾する．したがって N_i も可算個の点しか含むことができない．よって $|T_i|$ は可算であり，任意の正整数 j に対して $\cup_{0 \leq j \leq i} T_j$ も可算である．以上より，有限時間内で $\mathcal{A}$ によって判定される点の集合の濃度は可算であることがわかる．可算集合は可附番なので，$\mathcal{A}$ によって判定される点集合に対して $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$ という順序をつけることができる．

ここで対角線論法を使って，判定不能な実数点 s を構成する．1 次元折り紙 P は区間

$[0,1]$ なので，$s_1, s_2, \ldots$ は

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0.s_{1,1}s_{1,2}s_{1,3}\ldots \\
s_2 &= 0.s_{2,1}s_{2,2}s_{2,3}\ldots \\
&\ldots \\
s_k &= 0.s_{k,1}s_{k,2}s_{k,3}\ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

と列挙することができる[*1]．ただしここで s_k の小数点以下 ℓ 桁目の値を $s_{k,\ell}$ とする．そこで $d_k = s_{k,k} + 1 \pmod{10}$ として $s = 0.d_1d_2d_3\ldots$ と s を定義すると，s は 1 次元折り紙 P 上の実数点でありながら，T_i のいずれにも現れることはない．したがってこの s に対しては $t_{\mathcal{A}}(p,q,r,s)$ は有限ではない．つまりこの p,q,r,s に対してはアルゴリズム A を実現するプログラム $\mathcal{A}$ は停止しない．これは A が有限時間で折り判定問題を解くという仮定に矛盾する．したがって折り判定問題は，1 次元折り紙の上であっても判定不能である． □

3 おわりに

本論文では，自然と思われる折り紙モデルの上で，ごく単純な判定問題が判定不能となることを証明した．これは「有限個の点に有限回の操作を加えるだけでは可算無限個の点しか作れないこと」と，「折り紙などの連続した領域や区間には非可算無限個の点が存在すること」の齟齬によるものである．この結果には，方向の異なる二つの発展が考えられる．

一つは「無限精度の実数など現実的なモデルでない」と考えて，「誤差」を許すモデルを構築することである．つまり与えられた点 s が判定不能であっても，そのごく近傍に折ることのできる点があればそれでよしとする．例えば 1 次元折り紙における定理 2 の点 c を使った議論をそのまま使えば，「任意に与えられた誤差 $\epsilon > 0$ と点 s に対して，有限回で $[s-\epsilon, s+\epsilon]$ の内部に折り目をつける」といったモデルは簡単に作ることができる．これは比較的現実的なモデルであると考えられる．例えば [5] の結果を使えば 2 次元版でも同様の誤差を取り入れたモデルを構築できる．このモデル上では，任意の点は現実的な意味で折ることができる．そこで今後の課題として，与えられた点を折るための最適な方法を議論することが考えられる．折りの手順を少なくしたり，余分な折り目を少なくすることが目標となろう．

もう一つはこの結果を踏まえた上で「理論的な折り紙モデルによる計算」を深めることである．例えばチューリング機械の停止性判定問題にしても，理論的には万能デバッガが作れないという結論を出すことはできるが，だからといってチューリング機械の計算能力が弱くて役に立たないということを意味するわけではない．それを踏まえた上で計算量の理論やアルゴリズム理論が発展して，さまざまな結果が得られている．同様に，折り紙に

[*1] 例えば $0.999\cdots = 1.000\cdots$ という表現の曖昧さに対しては，どちらかを標準形と定めればよい．

よる計算が可算無限の点にしか到達できないとしても，折り紙による計算モデルの能力が低いということを意味するわけではない．例えば藤田の公準や羽鳥の操作を使うと，4 次方程式を解くことと同等の計算能力があることが知られている．しかしこうした「基本演算」をアルゴリズム的に組み合わせて計算したときの計算能力については，知られていることはほとんどない．従来のコンピュータとはまったく異なる「基本演算」を持つ「計算折り紙」の研究は始まったばかりである．

謝辞

本論文で提案するモデルと結果は，国内の研究会などで何度か発表し，多くの人にさまざまな形でコメントをいただいた．深く感謝する．特に，次元を 1 次元にしても同様の結果を示せることを指摘してくれた川崎敏和氏に感謝する．当初は 2 次元で議論していたが，それに較べると議論がはるかに単純ですっきりしたものになった．

参考文献

[1] Bern, M. and Hayes, B. The Complexity of Flat Origami. In *Proc. 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 175–183. ACM, 1996.

[2] Lang, R. J. *Origami Design Secrets*. A K Peters Ltd., 2003.

[3] Sipser, M. *Introduction to the Theory of Computation*. Course Technology Ptr., 2005. （邦訳：『計算理論の基礎 [原著第 2 版]』太田和夫，田中圭介，阿部正幸，植田広樹，藤岡淳，渡辺治訳，共立出版，2008 年）

[4] Demaine, E. D. and O'Rourke J. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007. （邦訳：『幾何的な折りアルゴリズム』上原隆平訳，近代科学社，2009 年）

[5] Tachi, T. and Demaine, E. D. Degenerative Coorinates in 22.5 degrees Grid System. *5th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, 2010.