論文名 Title	平面折紙作図の基本操作の再構成	Reconstruction of Origami Operations of Planar Origami Construction
著者 Author(s)	川崎敏和	Toshikazu Kawasaki
受理年月日 Date of acceptance	2011/12/20	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2012/08/01 Vol. 2 No. 1 page 4-14	
備考 Note		

日本折紙学会

Japan Origami Academic Society

www.origami.jp

平面折紙作図の基本操作の再構成

川崎敏和
阿南工業高等専門学校 一般教科
kawasaki@anan-nct.ac.jp

Reconstruction of Origami Operations of Planar Origami Construction

Toshikazu Kawasaki
Anan college of Technology, Anan, Tokushima, Japan

要約　平面折紙作図には基本となる操作が 8 つある．それらは 2 つの対象（点，直線）を関係（一致，所属，垂直，平行）結んだ形式[対象〈関係〉対象]で表現されている．本稿では，この形式の全組み合わせを調べることで，折紙作図の基本操作を再構成する．

Abstract: We have 8 origami operations in planar origami construction. They are represented by the forms "an object - relation - an object" such that an object is a point or a straight line, and relation is "equals to", "belongs", "is perpendicular to" or "is parallel to". In this paper, we reconstruct origami operations by researching all the forms "an object - relation - an object".

Keywords: Origami construction, origami operation, Huzita, Axiom, Abe's trisection folding

1. はじめに

平面折紙作図には 8 つの折りの操作（羽鳥[2]，本稿では**標準操作**とよぶ）があり，

P1：$X \in l \land X \in m$　P2：$xl = m$　P3：$xA = B$　P4：$A \in x \land B \in x$

P5：$x \perp l \land A \in x$　P6：$A \in x \land xB \in m$　P7：$xA \in l \land xB \in m$　P8：$x \perp l \land xB \in m$

と表される（川崎[4]）．これらは 2 つの**対象**（点，直線）を**関係**（一致，所属，垂直，平行）で結んだ形式で構成されている．例えば，P3：$xA = B$ は[作用・点〈一致〉点]，P8：$x \perp l \land xB \in m$ は[直線〈垂直〉直線]∧[作用・点〈所属〉直線]という具合である．本稿ではこのような形式の全組合せを調べることで，標準操作 P1 ～ P8 を含む全操作を再構成する．

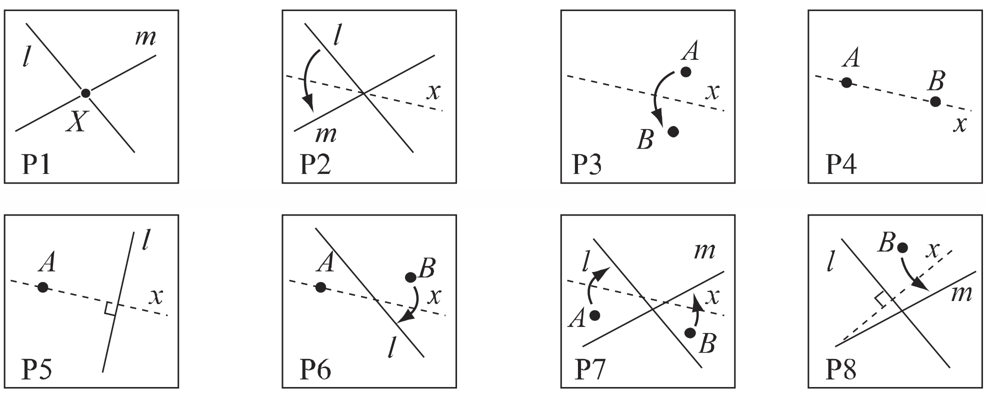


図 1.1　平面折紙作図の標準操作 P1 ～ P8

2. 単純操作

藤田の 7 公理（[1]， P1～P7の原型）はユークリッド幾何学でいう公理ではないので，報告者は[4]で**基本操作**とよんだ．しかし明確な定義を与えたわけではない．そこで，

定義 2. 1　与えられた点や直線を **0 次対象**，一致（=），所属（∈），垂直（⊥），平行（ ∥）を**関係**，直線 x に関する線対称移動や点 X に関する点対象移動を**作用**という．0 次対象に x や X を 1 回作用させたもの，および X と x は点や直線になるが，これを **1 次対象**とよぶ．さらに，0 次対象と 1 次対象の総称を**対象**という．対象と対象を関係で結んだ形式[対象<関係>対象]が x , X の一方だけを少なくとも 1 個含むとき，これを**形式操作**とよぶ．

例 2. 1　0 次対象である点 A や直線 l に対して，$xA,\ XA,\ xl, Xl$ が 1 次対象である．$xA \in l$ は形式操作であるが，$xA \in Xl$ は x と X の両方を含んでいるので形式操作ではない．また，$xA \ni l$ は直線が点の要素であることを表しているので無意味であるが，形式操作である．

定義 2. 2　形式操作は，折り線 x や点 X に関する方程式とみたとき，0 次対象に依らず解をもつならば，**単純操作**という．単純操作やその連立は，有限個の解をもつとき，**基本操作**という．

注意 2. 1　定義 2.2 の「0 次対象に依らず」という文言は単純操作にかかる条件であり，基本操作にはかからない. 0 次対象がある特定の位置にあるとき基本操作が解をもたないこともある．

注意 2. 2　$x = l$ や $X = A$ は基本操作の定義を満たしているが，既存の直線や点をなぞるだけで新たな直線や点が作図されない．ほかの基本操作と区別するために**自明な操作**とよぶ．

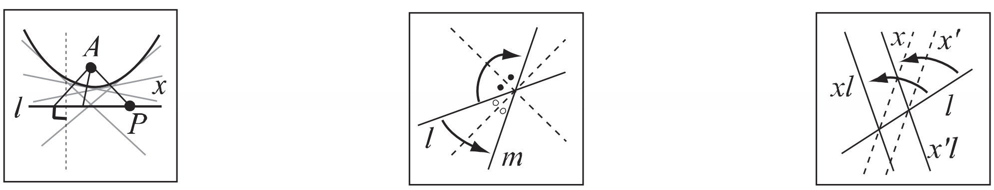
注意 2. 3　基本操作という名称は「基本的な操作」という思いを込めてつけたものであるが，「これは重要な折りだから基本操作に入れよう.」といった判断は禁物である．基本操作かどうかは，当然のことながら定義 2.1, 2.2 で決まる．

本稿で使う，よく知られた命題を確認する．

補題 2. 1　(1) 直線 l と l 上にない点 A が与えられたとき，l 上の動点 P と点 A を結ぶ線分 AP の垂直二等分線を x_P と表す．このとき直線 x_P の包絡線は A を焦点とし l を準線とする放物線になる．当然 x_P は放物線の接線になる．接線は準線 l に直交する向き以外のすべての向きをとる（図 2.1 左）．

(2) 交わる 2 直線 l, m のなす角の二等分線は 2 本あり，直交する（図 2.1 中）．

(3) 平行な 2 直線 x, x' と直線 l とが与えられたとき，l を直線 x, x' に関して対象移動したものは平行になる．すなわち $xl \parallel x'l$ となる（図 2.1 右）．



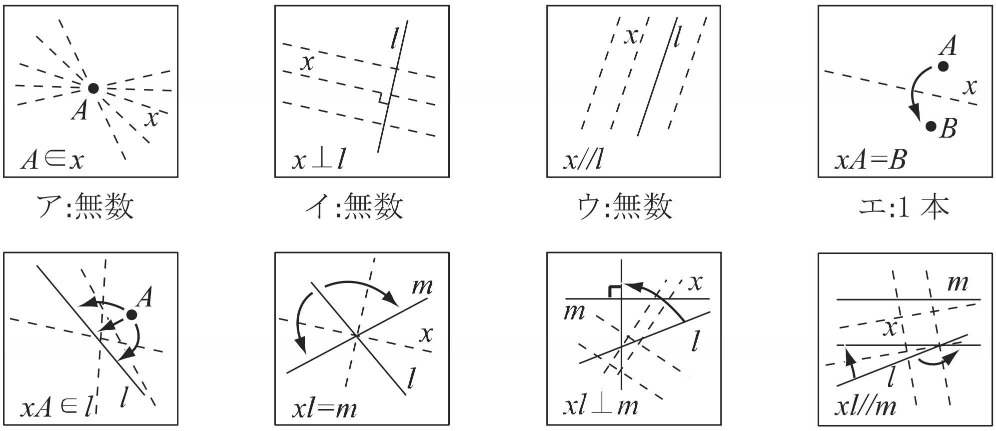
APの垂直二等分線　　2 本の角二等分線　　$xl \parallel x'l$

図 2.1

証明　合同変換の演算に慣れるために(3)のみ証明する．$x \parallel x'$だから，$px = x'$ なる平行移動 p が存在する．合同変換群では結合法則がなりたつので，$x'l = (px)l = p(xl)$．これは $x'l$ が xl と平行であることを意味する■

命題 2.1　直線 x を折る単純操作は，自明な操作を除くと，以下のア～クになる（図 2.2）．括弧内の数値は解の数を表す．

ア：$A \in x$　　点 A を通るように直線 x を折る（無数）
イ：$x \perp l$　　直線 l に垂直に直線 x を折る　（無数）
ウ：$x \parallel l$　　直線 l に平行に直線 x を折る（無数）
エ：$xA = B$（$A \neq B$）　点 A が点 B に重なるように直線 x を折る（1 本，P3）
　　$A = B$ の場合→ア（無数，図 2.3 左）
オ：$xA \in l$（$A \notin l$）　点 A が直線 l に乗るように直線 x を折る（無数）
　　$A \in l$ の場合→ア，イ（無数，図 2.3 右）
カ：$xl = m$（$l \cap m \neq \phi$, $l \parallel m$）　直線 l が直線 m に重なるように直線 x を折る（図 2.2）
　　（前者は角の二等分線 2 本→P2　後者は l と m の中央分離線 1 本）
　　$l = m$ の場合→イ（無数）
キ：$xl \perp m$　　直線 l が直線 m に垂直になるように直線 x を折る（平行線 2 種無数）
ク：$xl \parallel m$　　直線 l が直線 m と平行になるように直線 x を折る（平行線 2 種無数）



ア:無数　イ:無数　ウ:無数　エ:1 本
オ:無数　カ:2 本　キ:無数 2 種　ク:無数 2 種

図 2.2 直線 x を折る単純操作

証明　無意味な形式操作[点=直線]，[点⊥点]，[点⊥直線]，[点 ∥ 点]，[点 ∥ 直線]，[点 ∈ 点]，[直線 ∈ 点]，[直線 ∈ 直線]を除いた[点 ∈ 直線]，[点 = 点]，[直線 = 直線]，[直線 ⊥ 直線]，[直線 ∥ 直線]からなる表 2.1 を番号順に調べる．上半三角と重複する下半三角は表示しない．定義 2.1 より，x や X を 1 つも含まない※は除かれる．

① $A \in x$ は点 A を通る直線 x を折ることで解は無数にある．これを単純操作**ア**と表す．
② $m \perp x$ の解は，直線 m に垂直に直線 x を折るので無数にある．単純操作**イ**と表す．
③ $m \parallel x$ は直線 m に平行に直線を折るので解は無数にある．単純操作**ウ**と表す．
④ $x = m$ は自明な操作（注意 2.2）である．

	B	xB	l	x	xl
A	$A = B$ ※	$A = xB$ ⑤	$A \in l$ ※	$A \in x$ ①	$A \in xl$ ⑦
xA		$xA = xB$ ⑧	$xA \in l$ ⑥	$xA \in x$ ⑨	$xA \in xl$ ⑩
m			$\left.\begin{array}{l} m = l \\ m \perp l \\ m//l \end{array}\right\}$ ※	$m = x$ ④ $m \perp x$ ② $m \mathbin{/\!/} x$ ③	$m = xl$ ⑪ $m \perp xl$ ⑫ $m \mathbin{/\!/} xl$ ⑬
x				無意味	$x = xl$ ⑭ $x \perp xl$ ⑮ $x \mathbin{/\!/} xl$ ⑯
xm					$\left.\begin{array}{l} xm = xl \\ xm \perp xl \\ xm//xl \end{array}\right\}$ ⑰

表 2.1　直線 x を折る操作

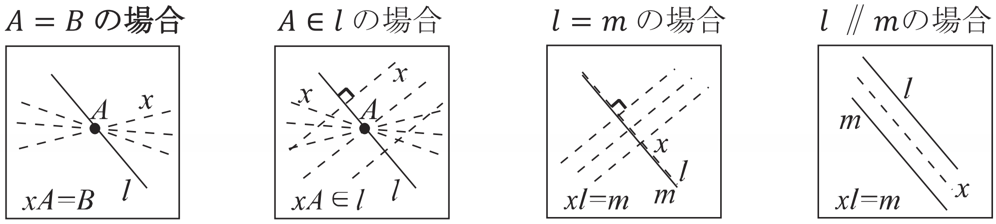


図 2.3　エ:$xA = B$　　オ:$xA \in l$→ア,イ　図 2.4　カ:$xl = m$→イ　中央分離線

⑤　$A = xB \Leftrightarrow xA = B$（$A \neq B$）は，点 A を点 B に重ねる折り線 x をつけることなので，線分 AB の垂直二等分線が解になる． $A = B$ の場合の解は点 A を通る任意の直線つまりア： $A \in x$ になる（図 2.3 左）．第 3 節で単純操作ア～クを連立させるが， $A = B$ の場合はアの中で処理される．このような処理を**アに帰着**あるいは**→ア**と表現する．単純操作 $xA = B$（$A \neq B$ の場合）を**エ**と表す．これは標準操作 P3 であるとともに，解が 1 つしかないので基本操作でもある．

⑥　$xA \in l$ は点 A が直線 l に乗るように直線 x を折ることだから，$A \notin l$ の場合は点 A を焦点, 直線 l を準線とする放物線の任意の接線が解になる（補題 2.1(1)）. $A \in l$ の場合は, $x = l$ と $x \perp l$ が解になるのでアとイに帰着される．どの場合も解をもつので単純操作である（図 2.3 右）．$xA \in l$ （$A \notin l$）を**オ**と表す．

⑦　$A \in xl \Leftrightarrow xA \in l \Leftrightarrow$オ.

⑧　$xA = xB$ は，両辺に x を作用させることで $x(xA) = x\,(xB)$ になるが， x を 2 度作用させると元にもどって $A = B$ となり，x が消滅するので単純操作ではない.

⑨　$xA \in x \Leftrightarrow x(xA) \in xx \Leftrightarrow A \in xx$． xx は直線 x を折り線 x で折ったものだから x になる．したがって→ア： $A \in x$.

⑩　$xA \in xl$ は x が消滅して $A \in l$ になるので単純操作ではない.

⑪　$xl = m$ の解は，l と m が交わる場合は，l と m の角の二等分線（2 本）である. $l = m$ の場合には自明な操作 $x = l$ または $l \perp m$ なので→イ（図 2.4 左）． $l \mathbin{/\!/} m$ の場合は l と m の中央分離線（1 本）になる（図 2.4 右）．いずれにせよ解があるので⑪は単純操作である．$xl = m$

（$l \neq m$）を**カ**と表す．これは標準操作 P2，そして基本操作である．

⑫　$xl \perp m$ は直線 l が直線 m に直交するように直線 x を折ることである．$l = m$，$l \mathbin{/\!/} m$，$l \perp m$ のどのケースでも，l が m と普通に交わる一般の位置の場合と同じく 2 種類の平行な直線群を解にもつので単純操作である（補題 2.2(1)，図 2.5）．$xl \perp m$ を**キ**と表す．

⑬　$xl \mathbin{/\!/} m$ は直線 l が直線 m と平行になるように直線 x を折ることで，⑫と同じく 2 種類の平行な直線群を解にもつ単純操作になる（補題 2.2(2)，図 2.6）．

⑭　$x = xl \Leftrightarrow x = l$：自明な操作．

⑮　$x \perp xl \Leftrightarrow$イ：$x \perp l$．

⑯　$x \mathbin{/\!/} xl \Leftrightarrow$ウ：$x \mathbin{/\!/} l$．

⑰　3 つとも x 消滅．■

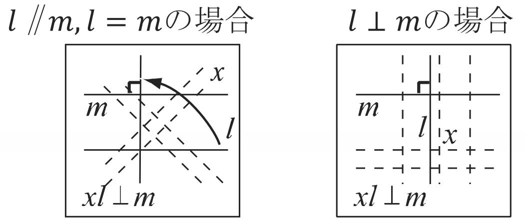


図 2.5　キ：$xl \perp m$　平行線 2 種無数

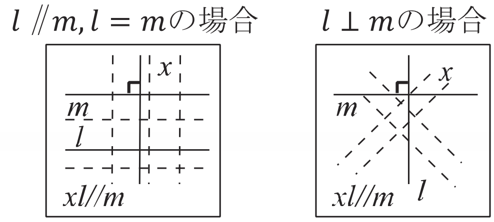


図 2.6　ク：$x \mathbin{/\!/} m$　平行線 2 種無数

命題 2.1 の⑫⑬で使った補題はこの先も使うので，ここにまとめておく．

補題 2. 2　(1) 単純操作キ：$xl \perp m$ の解は，直交する 2 種類の平行な直線群になる．
(2) 単純操作ク：$xl \mathbin{/\!/} m$（$l \cap m \neq \phi$）の解も，直交する 2 種類の平行な直線群になる．

証明　先に(2)を示す．$xl \perp m$ の解は次の手順で求めることができる．①　l と m を重ねる折り線（角の二等分線）を折る（図 2.1 中）．②　補題 2.1(3)より，①の直線と平行な直線が解になる．角の二等分線は 2 種類（x，yと表す）あり，互いに直交するので（補題 2.1(2)），解は互いに直交する 2 種類の平行な直線群になる．次に(1)を示す．単純操作キ：$xl \perp m$ は，直線 m と直交する直線 m' を 1 本折ってから，ク：$xl \mathbin{/\!/} m'$を解けばよい．当然，クと同じく，直交する 2 種類の平行な直線群が解になる．なお，$l \cap m' \neq \phi$ の場合，つまり $l \mathbin{/\!/} m'$ の場合は，$m' = l$ とする．■

補助線 y をはさむことで，$x \mathbin{/\!/} l \Leftrightarrow y \perp l \wedge x \perp y$ となる（図 2.7）．

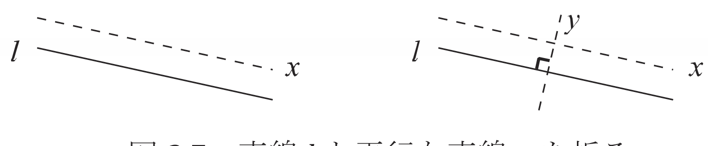


図 2.7　直線 l と平行な直線 x を折る

図 2.8　左：$xl \perp m$，右：$xl \perp m \Leftrightarrow y \perp m \wedge y = xl$

さらに，$xl \perp m \Leftrightarrow y \perp m \wedge xl = y$（図 2.8）と表されるので，$x \mathbin{/\mkern-5mu/} l$ や $xl \perp m$ の導入に異を唱える人もいるだろう．また，$x \perp l$ が l を l に重ねることで確実に折れるのに対して，$x \mathbin{/\mkern-5mu/} l$ は平行を，$xl \perp m$ は直角を目分量で測るという曖昧さをもつ．しかし，標準操作 P1～P8 にも曖昧さはある．巨大な紙で直線 l,m のなす角の二等分折り（$xl = m$）することを考えよう．まず直線 l 上の点 A を直線 m の部分 n のあたりにもつて行って仮置きする（図 2.8 (1)(2)）．仮置きだから真の xA の位置ではないが．これをもとに折ると折り線が角 O を通らないので，角 O を二等分したことにならず，折り線が角 O を通るように微調整をくり返すことになる（図 2.8(3)）．先に角 O を二等分する短い折り線 x をつければよいと考えたくなるが，x が角 O を二等分することは縁を合わせるまで確認できないので，(1)に戻る（図 2.8(4)）．P7：$xA \in l, xB \in m$ の曖昧さはもっとはっきりしている．点 A を直線 l 上（点 A' とする）に，点 B を直線 m 上に（点 B' とする）重ねても，線分 AB と線分 $A'B'$ の長さが一致するとは限らない（図 2.8）．$A'B'$ が AB より短ければ紙が破れ，長ければたるむ．点 B' をずらして（点 B''）$AB = A'B''$ とすることはできるが，$B''C = B'C$ でなければ線分 AB は線分 $A'B''$ に重ならない．微調整をくり返さなければ P7 の解 x を求めることができない．このような**微調整（曖昧さ）**を受け入れて，**一回で折ることができる**としたのが標準操作 P1～P8 なのである．同様に，$x \mathbin{/\mkern-5mu/} l$ や $xl \perp m$ も一回で折れるものとしてよい．

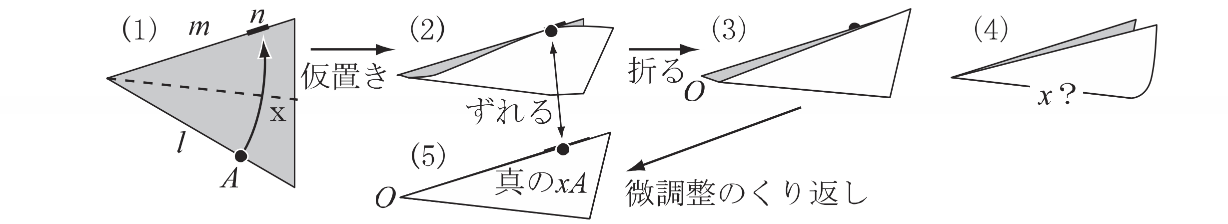


図 2.9　$xl = m$

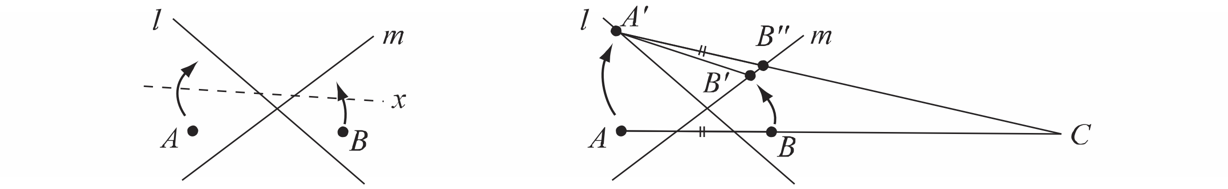


図 2.10　左　標準操作 P7：$xA \in l \wedge xB \in m$　右　P7の曖昧さと微調整

3. 直線 x を折る単純操作の連立

命題 2.1 の 2 つの単純操作,

エ：$xA = B$（$A \neq B$，1 本，標準操作P3），

カ：$xl = m$（$l \neq m$ のとき 2 本，ただし $l \mathbin{/\mkern-5mu/} m$ のときは 1 本，標準操作P2）

の解は有限個なので基本操作になる．一方，解が無数ある他の単純操作は連立させて解を有限個に抑えて基本操作にしていく．この作業に必要な単純操作の性質をまとめて示す．

命題 3.1　任意の 2 直線 l,m と直線 x に対して，x と平行な直線 x' は l,m に対する関係（$\mathbin{/\mkern-5mu/}$，$\perp$）を保つ．すなわち，(1) $x \perp l \Rightarrow x' \perp l$，(2) $x \mathbin{/\mkern-5mu/} l \Rightarrow x' \mathbin{/\mkern-5mu/} l$，(3) $xl \perp m \Rightarrow x'l \perp m$，(4) $x'l \mathbin{/\mkern-5mu/} m \Rightarrow x'l \mathbin{/\mkern-5mu/} m$．

証明　(1)(2)は図 3.1 から明らか．$xl \perp m \Rightarrow x'l \perp m$を証明しよう．$x$ を x' に移す平行移動を p と表すと $x' = px$ となる．$x'l = pxl \perp pm$．p は平行移動だから $pm \parallel m$となり，$x'l \perp m$ を得る．$x\, l \parallel m \Rightarrow x'l \parallel m$ も同様に証明できる．■

図 3.1

命題 3. 2　平行や垂直だけからなる単純操作の連立は基本操作ではない(表 3.1 の網かけ枠)．

証明　平行と垂直だけを関係にもつ単純操作は，イ：$x \perp l$，ウ：$x \parallel l$，キ：$xl \perp m$，ク：$xl \parallel m$の 4 つしかない．x がこれらの連立方程式の解であると，命題 3.1 より，xと平行な直線 x' も連立方程式の解となる．平行な直線は無数にあるため連立方程式が無数の解をもつことになる．したがって解が有限であることを求められる基本操作にはなれない．■

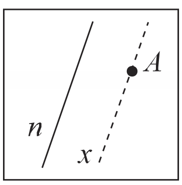
$\wedge$	ア：$B \in x$	イ：$x \perp n$	ウ：$x \parallel n$	オ：$xB \in n$	キ：$xn \perp k$	ク：$xn \parallel k$
ア $A \in x$	$\left.\begin{array}{l}A \in x\\ B \in x\end{array}\right\}$ P4	$\left.\begin{array}{l}A \in x\\ x \perp n\end{array}\right\}$ P5	$\left.\begin{array}{l}A \in x\\ x//n\end{array}\right\}$ ①	$\left.\begin{array}{l}A \in x\\ xB \in n\end{array}\right\}$ P6	$\left.\begin{array}{l}A \in x\\ xn \perp k\end{array}\right\}$ ②	$\left.\begin{array}{l}A \in x\\ nx//k\end{array}\right\}$ ③
イ $x \perp l$		$x \perp l$ $x \perp n$	$x \perp l$ $x \parallel n$	$\left.\begin{array}{l}x \perp l\\ xB \in n\end{array}\right\}$ P8	$x \perp l$ $xn \perp k$	$x \perp l$ $xn \parallel k$
ウ $x \parallel l$			$x \parallel l$ $x \parallel n$	$\left.\begin{array}{l}xA//l\\ xB \in n\end{array}\right\}$ ④	$x \parallel l$ $xn \perp k$	$x \parallel l$ $xn \parallel k$
オ $xA \in l$				$\left.\begin{array}{l}xA \in l\\ xB \in n\end{array}\right\}$ P7	$\left.\begin{array}{l}xA \in l\\ xn \perp k\end{array}\right\}$ ⑤	$\left.\begin{array}{l}xA \in l\\ xn//k\end{array}\right\}$ ⑥
キ $xl \perp m$					$xl \perp m$ $xn \perp k$	$xl \perp m$ $xn \parallel k$
ク $xl \parallel m$						$xl \parallel m$ $xn \parallel k$

表 3.1　直線 x に関する単純操作の連立

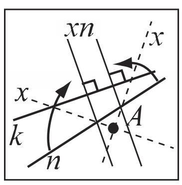
命題 3. 3　単純操作の連立により，直線 x を折る新たな基本操作：P9～ P14が得られる．

P 9　$A \in x \wedge x \parallel n$　　P10　$A \in x \wedge xn \perp k$　　P11　$A \in x \wedge xn \parallel k$

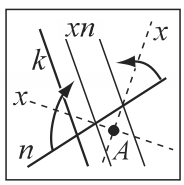
P12　$x \parallel l \wedge xB \in n$　　P13　$xA \in l \wedge xn \perp k$　　P14　$xA \in l \wedge xn \parallel k$



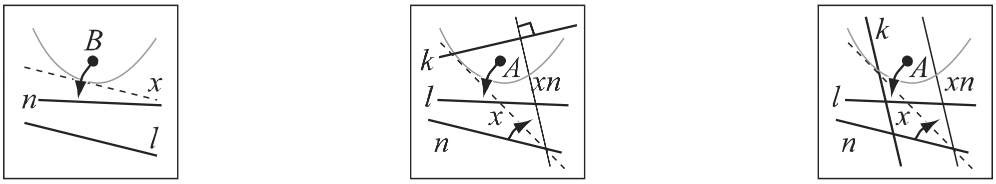
P9



P10



P11



P12　　　　P13　　　　P14

図 3.2　直線 x を折る新たな基本操作P9～ P14

証明　命題 3.2 より，表 3.1 の①～⑥だけ調べればよい．

① 直線 n を平行に移動して点 A を通るようにすると，$A \in x \wedge x \mathbin{/\!/} n$ の唯一の解 x が得られる（図 3.3①)）．この基本操作を P9 と表す．

② 補題 2.2 (1)より，$xn \perp k$の解は直交する 2 種類の平行な直線群になる．平行な直線群は平面を覆うので，点 A を通るものが 1 本ずつ存在する（図 3.3②）．この 2 本が②の解である．$A \in x \wedge xn \perp k$ を基本操作 P10 と表す．

③ 補題 2.2(2)より，$xn \mathbin{/\!/} k$の解も直交する 2 種類の平行な直線群である．以下，②と同様に，③は 2 つの解をもつ（図 3.3③）．$A \in x \wedge xn \mathbin{/\!/} k$ を基本操作 P11 と表す．

④ ．$xB \in n$の解は図 3.3④のように，点 B を焦点，直線 l を準線にもつ放物線の接線になる．接線は準線と直交する直線以外のすべての傾きをとるので，$l \perp n$ なる場合を除けば，$x \mathbin{/\!/} l \wedge xB \in n$ も解を 1 つもつ（図 4.1）．この基本操作を P12 と表す．

⑤ まず，$xn \perp k$の解である直交する 2 種類の平行な直線群を考える．$xA \in l$の解である放物線の接線群は，準線 l に垂直な方向を除いたすべての方向をとるので，2 種類の平行な直線群の中に少なくとも 1 つ，ほとんど場合は 2 つ，$xA \in l$を満たすものが存在する．これが $xA \in l \wedge xn \perp k$ の解になる．この基本操作を P13 と表す．

⑥ kに垂直な直線 k'を折っておくと，$xA \in l \wedge xn \perp k'$と書き換えられるので，⑤と同じように 1 本あるいは 2 本の解をもつ．$xA \in l \wedge xn \mathbin{/\!/} k$ を基本操作 P14 と表す．■

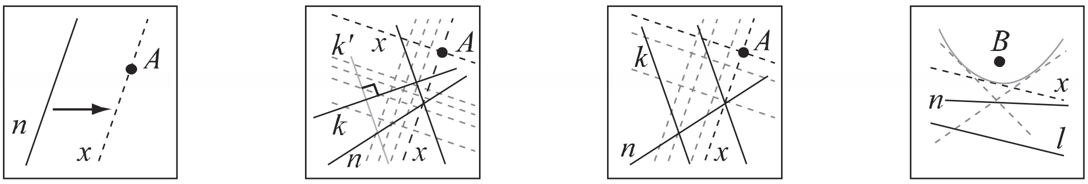


図 3.3　①$A \in x \wedge x \mathbin{/\!/} n$　② $A \in x \wedge xn \perp k$　③ $A \in x \wedge xn \mathbin{/\!/} k$　④ $x \mathbin{/\!/} l \wedge xB \in n$

4. 点 X を印す単純操作

命題 4. 1　点 X を印す単純操作は，自明な操作を除くと，ケ，コ，サの 3 つあり，ケは基本操作になる．

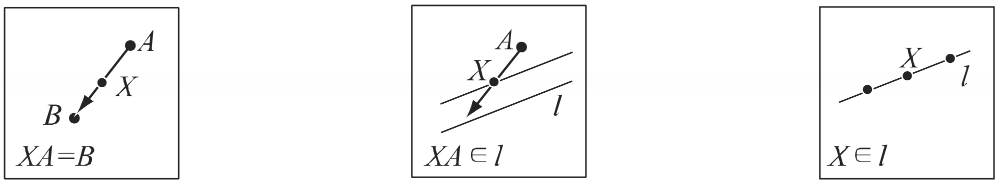
ケ：$XA = B$（$A \neq B$）　線分 AB の中点に点 X を印す（1 個，P15，図 4.1 左）

$A = B$の場合→自明な操作 $X = A$

コ：$XA \in l$（$A \notin l$）　点 A 中心，直線 l の 1/2 縮小像 $C_A(l)$ に点 X を印す（無数，図 4.1 中）

$A \in l$ の場合→サ（無数）

サ：$X \in l$　直線 l 上に点 X を印す（無数，図 4.1 右）



ケ：$XA = B$（$A \neq B$）　　コ：$XA \in l$　　サ：$X \in l$

図 4.1　点 X を印す単純操作

	B	XB	l	X	Xl
A	$A = B$※	$A = XB$ ①	$A \in l$※	$A = X$自明	$A \in Xl$ ③
XA		$XA = XB$#	$XA \in l$ ③	$XA = X$ ②	$XA \in Xl$#
m			$\left.\begin{matrix} m = l \\ m \perp l \\ m//l \end{matrix}\right\}$※	$m \ni X$ ④	$m = Xl$ ⑤ $m \perp Xl$ ⑥ $m \mathbin{/\mkern-5mu/} Xl$ ⑦
X				無意味	$X \in Xl$ ⑧
Xm					$Xm = Xl$ #

表 4.1　点 X を印す操作

証明　直線 x を折る操作と同じように表 4.1 が得られる. 点 X が含まれないもの※, 点 X が消滅することが明らかなもの#は単純操作ではないのでとばす. また, 自明なものもとばす.

① $A = XB$（$A \neq B$）は $XA = B$ と同じで，点 X に関する点対象移動で点 A と点 B が重なることを意味する．したがって点 X は線分 AB の中点になる（図 4.1 左）．$A = B$ の場合は自明な操作 $X = A$ になるが，点 A は線分 AA の中点なので$A \neq B$の場合と同じ結果になると解釈することもできる．$XA = B$ を**ケ**と表す.

② $XA = X \Leftrightarrow X(XA) = XX \Leftrightarrow (XX)A = X \Leftrightarrow$自明な操作 $X = A$.

③ $XA \in l$（$A \notin l$）は点 A と直線 l 上の点を結んだ線分の中点，つまり直線 l を点 A 中心に 1/2 縮小した直線 $C_A(l)$（[5]）上に点 X を印すことである（図 4.1 中）．$A \in l$ の場合の解は $X \in l$ であるが，$C_A(l) = l$ だから，$A \notin l$の場合と同じ結果になる．$XA \in l$ を**コ**と表す.

④$X \in l$は直線 l 上に点 X を印すことだから無数解．$X \in l$ を**サ**と表す（図 4.1 右）.

⑤ $Xl = m$．任意の点 X に対して $Xl \mathbin{/\mkern-5mu/} l$ または$Xl = l$ なので，m が l と平行でないかぎり $Xl = m$ は解をもたない（図 4.2）．したがって単純操作ではない.

⑥ $Xl \perp m$ も $m \perp l$ でないかぎり解をもたないので単純操作ではない.

⑦ $Xl \mathbin{/\mkern-5mu/} m$も$l \mathbin{/\mkern-5mu/} m$でないかぎり解をもたないので単純操作ではない.

⑧ $X \in Xl \Leftrightarrow XX \in X(Xl) \Leftrightarrow X \in (XX)l \Leftrightarrow X \in l \Leftrightarrow$ ④. ■

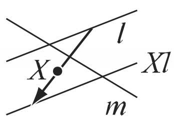


図 4.2　⑤$Xl = m$ 解なし

5. 点 X を印す単純操作の連立

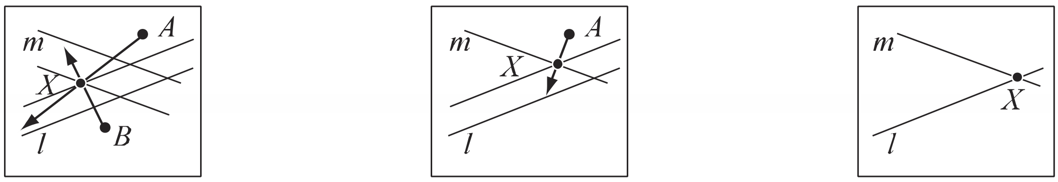
命題 5.1　単純操作の連立により，点 X を印す新たな基本操作 P16，P17 が得られる．

P16　$XA \in l \wedge XB \in m$　　　P17　$XA \in l \wedge X \in m$

証明　単純操作ケ, コ, サのうち, ケ: $XA = B$ は単独で基本操作 P15 になるので, コ:$XA \in l$ とサ:$X \in l$だけで連立させればよい(表 5.1). 太線枠の$X \in l \wedge X \in m$は標準操作 P1 である.
① $XA \in l \wedge XB \in m$ の解は, 点 A 中心とする直線 l の 1/2 縮小像 $C_A(l)$ と点 B 中心とする直線 m の 1/2 縮小像 $C_B(m)$ の交点である．この基本操作をP16と表す.
② $XA \in l \wedge X \in m$ の解は $C_A(l)$ と直線 m の交点になる．この基本操作をP17と表す．■

$\wedge$	コ:$XB \in m$	サ:$X \in m$
コ:$XA \in l$	$\left.\begin{matrix} XA \in l \\ XB \in m \end{matrix}\right\}$ ①	$\left.\begin{matrix} XA \in l \\ X \in m \end{matrix}\right\}$ ②
サ:$X \in l$		$\boxed{\left.\begin{matrix} X \in l \\ X \in m \end{matrix}\right\} \text{P1}}$

表 5.1　点 X を印す単純操作の連立



①　$XA \in l \wedge XB \in m$（P16）　② $XA \in l \wedge X \in m$（P17）　$X \in l \wedge X \in m$（P1）

図 5.1　点 X を印す基本操作

6. まとめ

2 つの対象を関係でつないだ形式操作が解をもつときこれを単純操作とよび, 単純操作が単独あるいは連立で解を有限個しかもたないとき基本操作とよんだ．本稿では単純操作とその連立をすべて調べることで，直線 x を折る P9～P14 と点 X を印す P15～P17 を加える 17 個の基本操作を得た．17 個の中には既知の標準操作 P1～P8 が含まれるので，過去の研究の拡張になっている．標準操作から倍増した原因は 3 つある．

1．関係に平行 ∥を加えたこと．
2．点 X の作用を加えたこと．
3．2 つの単純操作：$xn \perp k$，$xn \,/\!/\, k$を見つけたこと．

図 2.7 で示したように，平行 ∥は垂直⊥のくり返しで実現できるので，操作の構成要素から削除したくなるが，くり返しは本稿の連立とは異なるので，削除したければ「くり返し」を定義する必要がある．仮に「くり返し」を矛盾なく定義して平行を削除すると，新たな操作はP10，P13，P16，P17 だけになる．また，点 X を印す操作は，折り線がつかない標準操作 P1：$X \in l \wedge X \in m$ を他の標準操作と対等な地位を保つために不可欠である．しかし作用としての X をはずすことは可能である．そうすると，新たな操作は $xn \perp k$ を要素

にもつ P10 とP13の 2 つだけになる．$xn \perp k$ はらせん折り（図 6.1）で用いられる普通の折りであり，任意角の三等分（[3]）で使われる標準操作 P7：$xA \in l \wedge xB \in m$より自然な折りなのではずしたくない.

このように説明すると，基本となる操作が解釈次第で変わるのは好ましくないと思うかもしれない．しかし注意 2.3 で述べたように「基本となる操作」≠「基本操作」であり，本稿の命題はすべて，定義 2.1，2.2 で定めた概念に関するものである．虚数単位 i を受け入れるかどうかで 2 次方程式の解の記述が変わるように，基本操作の定義を変えれば命題も変わる．定義が折紙作図の本質に近いかどうかは，平面折紙作図だけでなく球面や高次元折紙作図などで総合的に判断しなければならない．現時点では P1～P17 は標準操作の最大拡張，どう工夫してもこれ以上増やせないと理解するのがよい.

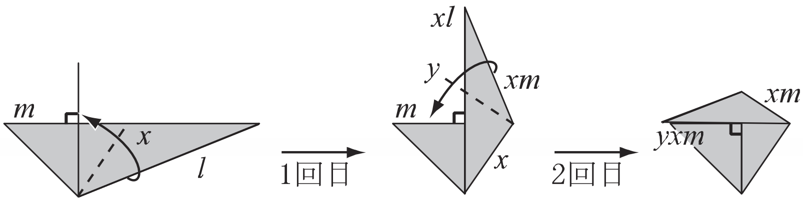


図 6.1　らせん折り

参考文献

［1］ Huzita, H.“Axiomatic Development of Origami Geometry.”In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology,* edited by H. Huzita, pp.143-158. Padova, Italy: Dipartmento di Fisica dell’Universita di Padova, 1991.

［2］ Hatori, K.“K’s Origami: Origami Construction”Available at http://origami.ousaan.com/library/conste.html, 2002.

［3］ 阿部恒,『すごいぞ折り紙ー折り紙の発想で幾何を楽しむ』, 日本評論社，2003

［4］ 川崎敏和,「球面折紙作の 4 つの基本操作」, 折り紙の科学,Vol.1, No.1(2011), 19-24.

［5］ 川崎敏和,「球面折紙作図の基本操作 $\boldsymbol{xA} \in \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{xB} \in \boldsymbol{m}$の解の個数について」，折り紙の科学 (in press).