論文名 Title	球面折紙作図の基本操作の再構成	Reconstruction of Origami Operations of Spherical Origami Construction
著者 Author(s)	川崎敏和	Toshikazu Kawasaki
受理年月日 Date of acceptance	2012/1/25	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2012/08/01 Vol. 2 No. 1 page 15-24	
備考 Note		

球面折紙作図の基本操作の再構成

川崎敏和
阿南工業高等専門学校　一般教科
kawasaki@anan-nct.ac.jp

Reconstruction of Origami Operations of Spherical Origami Construction

Toshikazu Kawasaki
Anan college of Technology, Anan, Tokushima, Japan

要約　球面折紙作図には折りの操作が 4 つあることがわかっている．しかしそれらは平面折紙作図の 8 公理を球面に書き直したものであり，球面で直接に構成したものではない．本稿では，平面折紙作図の 17 基本操作を構成した手法を用いて，球面折紙作図の基本操作を再構築する．

Abstract: It is well-known that we have 4 origami operations in spherical origami construction. They are not constructed directly but are deformed from 8 origami operations in planar origami construction. In this paper, we reconstruct origami operations by the method that gives the 17 fundamental origami operations in planar origami construction.

Keywords: Origami construction, origami operation, Great circle, Pole

1.　はじめに

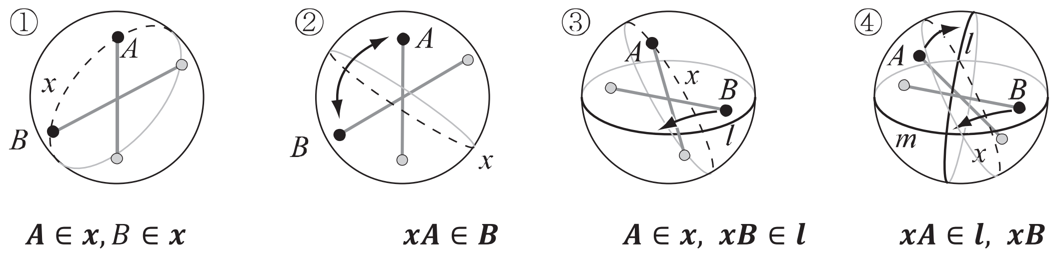
球面折紙作図には 4 つの折りの操作があり，

①　$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{x}, B \subset \boldsymbol{x}$　　②　$\boldsymbol{xA} = \boldsymbol{B}$　　③　$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{xB} \subset \boldsymbol{l}$　　④　$\boldsymbol{xA} \subset \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{xB} \subset \boldsymbol{m}$

と表せた（[2]）．

注意　［2］では双対性を用いた．そのため，対極の位置にある 2 点の組 $\boldsymbol{A} = \{A, A'\}$ を点とよんだ．直線はこの点の集合と考えなければならず，$\boldsymbol{A}$ は直線の部分集合ではなく要素である．したがって，$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{x}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{x}$ という[2]の表示は誤りであり，$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{x}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{x}$ が正しい．なお，本稿では点は単一の点として扱うので，どのみち $\in$ になる．

本稿では[3]の手法，つまり形式［対象<関係>対象］をすべて調べることで，球面折紙作図の基本操作を再構築していく．



$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{x}, B \in \boldsymbol{x}$　　$\boldsymbol{xA} \in \boldsymbol{B}$　　$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{xB} \in \boldsymbol{l}$　　$\boldsymbol{xA} \in \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{xB} \in \boldsymbol{m}$

図 1.1　双対性に基づく球面折紙作図の 4 つの折りの操作

[2]では，平面折紙作図の 8 基本操作（[3]の標準操作）を球面で解釈してから双対性を用いて 4 つにまとめた．図 1.2 は 8 基本操作を球面で解釈し直したもの＋羽鳥が発見した

第 9 の操作である．本稿ではこれを**球面折紙作図の 9 標準操作**とよぶ．

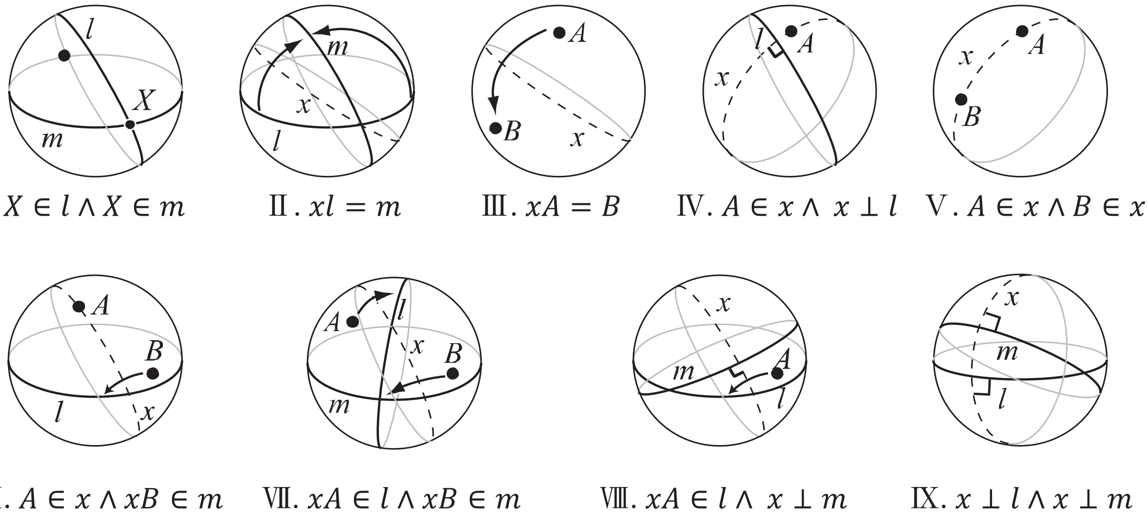


図 1.2　双対性を考慮する前の球面折紙作図の 9 標準操作

2. 球面特有の公理

まず，折紙作図とは独立した 3 つの公理を与える．

定義 2.1　次の 3 操作を**A1**，**A2**，**A3** と表し，**球面折紙作図の 3 公理**とよぶ．

A1：球面上の点 A に対して，その対極の位置 A' に点 X を印すことができる
A2：球面上の点 A に対して，A を極に持つ赤道（大円 A_*）xを引くことができる
A3：大円 l に対して，l を赤道とするような極点 l_* に点 X を印すことができる

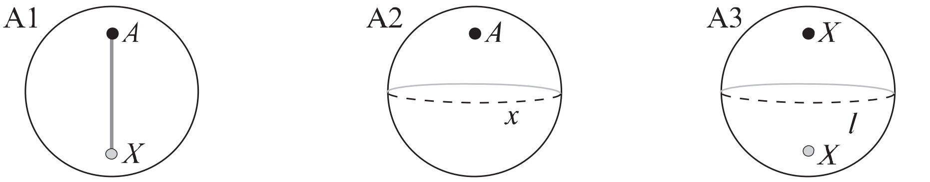


図 2.1　球面折紙作図の 3 公理

球面をスイカにたとえて，3 公理は次のように説明できる．公理 A1 は『スイカの表面に印された点Aに細長い針金を刺して真反対の点を貫くことができる』．公理 A2 は『スイカ表面の点 A を極点にもつ赤道に沿ってスパッと切ることができる』．公理 A3 は『真っ二つに切られたスイカから，切り口を赤道面にもつ 2 極点がかわる』．対極点，極点に対する赤道，大円に対する極点は作図しなくても在るものとし使ってよいというのが公理の主張である．各公理は基本操作のくみあわせくり返しで実現できるが，今は触れない．

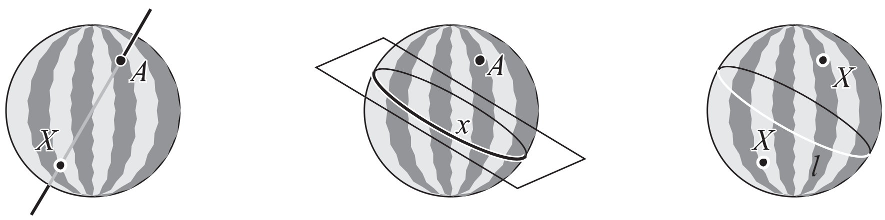


図 2.2　3 公理：左から順に A1，A2，A3

3. 球面折紙作図の単純操作

定義 3.1　球面上の点 X に対して，点 X と対極の位置にある点 X' を結ぶ線分を回転軸にして球面上の点を 180 度回転させること（点対称移動）で**点 X の作用**を定義する．

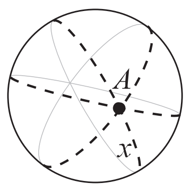
定義 3.2　球面上の与えられた点や直線（大円）を**0 次対象**，一致（=），所属（∈），垂直（⊥）を**関係**，直線 x に関する線対称移動や点 X に関する点対象移動を**作用**という．0 次対象に x または X を 1 回作用させたもの，および X，x は点や直線になる．これらを**1 次対象**とよぶ．さらに，0 次対象と 1 次対象を合わせて**対象**という．対象と対象を関係で結んだ形式[対象<関係>対象]が x，X の一方だけを少なくとも 1 個含むとき，これを**形式操作**とよぶ．

定義 3.3　形式操作は直線 x や点 X に関する方程式とみなせ，**0 次対象に**依らず解をもつとき**単純操作**という．単純操作あるいはその連立方程式は，有限個の解をもつとき，**基本操作**という．さらに，$x = l$ や $X = A$ を**自明な操作**といい，単純操作および基本操作と区別する．

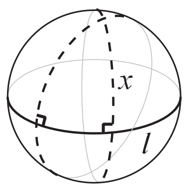
注意 3.1　$xA \in Xl$ には x と X がともに含まれるので形式操作ではない．
注意 3.2　定義 3.3 の「0 次対象に依らず」という文言は単純操作にかかる条件であり，基本操作にはかからない．0 次対象が特殊な位置関係にあるとき，基本操作が解をもたないこともある．

命題 3.1　直線 x を折る単純操作は，自明な操作を除くと，以下のア，イ，エ～キになる（図 3.1）．括弧内の数値は解の数を表す．

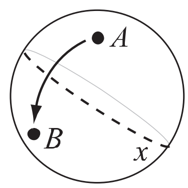
ア：$A \in x$　　点 A を通る直線 x を折る（無数）
イ：$x \perp l$　　直線 l と垂直に直線 x を折る（無数）
エ：$xA = B$（$A \neq B$）　点 A が点 B に重なるように直線 x を折る（1 個，S1）
　　$A = B$ の場合は，ア：$A \in x$ に帰着（無数，図 3.1 左）
オ：$xA \in l$（$A \notin l$）点 A が直線 l に乗るように直線 x を折る（無数）
　　$A \in l$ の場合→ア：$A \in x$，イ：$x \perp l$（無数，図 3.2 中）
カ：$xl = m$（$l \neq m$）直線 l が直線 m に重なるように直線 x を折る（2 個，S2）
　　$l = m$ の場合→イ：$x \perp l$（無数，図 3.2 右）
キ：$xl \perp m$　　直線 l が直線 m と垂直になるように直線 x を折る（無数）
　　$l \perp m$ の場合→イ：$x \perp m$（無数，図 3.3 右）



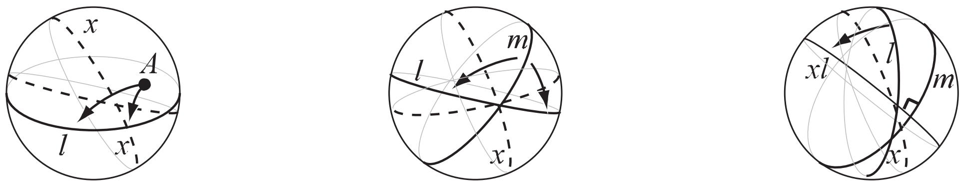
ア：$A \in x$（無数）



イ：$x \perp l$（無数）



エ：$xA = B$（1 個，S3）



オ：$xA \in l$（無数）　　カ：$xl = m$（2 本，S2）　　キ：$xl \perp m$（無数）

図 3.1　直線 x を折る単純操作

	B	xB	l	x	xl
A	$A = B$ ※	$A = xB$ ③S1	$A \in l$ ※	$A \in x$ ①	$A \in xl$⑧
xA		$xA = xB$ #	$xA \in l$⑦	$xA \in x$ ④	$xA \in xl$ #
m			$m = l$ $m \perp l$ ※	$m = x$ 自明 $m \perp x$ ②	$m = xl$⑨S2 $m \perp xl$⑩
x				無意味	$x = xl$ ⑤ $x \perp xl$ ⑥
xm					$xm = xl$ $xm \perp xl$ #

表 3.1　直線 x を折る単純操作の候補

証明　無意味な形式操作[点=直線]，[点⊥点]，[点⊥直線]，[点 ∈ 点]，[直線 ∈ 点]，[直線 ∈ 直線]を除いた[点 ∈ 直線]，[点 = 点]，[直線 = 直線]，[直線 ⊥ 直線] からなる表 3.1 を番号順に調べていく．上半三角と重複する下半三角は表示しない．※は x がなく，# は両辺に x を作用させることで x が消えるのでとばすことができる．

① $A \in x$は点 A を通る直線 x を折る操作なので，解が無数にある．$A \in x$ を**ア**と表す．

② $m \perp x$ は直線 m に垂直に直線 x を折るので，解が無数にある．$m \perp x$ を**イ**と表す．

③ $A = xB \Leftrightarrow xA = B$ の解は， $A \neq B$ の場合，線分（大円弧）ABの垂直二等分線としてただ一つ決まる．$A = B$の場合は点 A を通る任意の直線 x が解になるのでアと同じになる．このような処理を**アに帰着**あるいは**→ア**と表現する．$xA = B$（$A \neq B$）を単純操作**エ**と表す．これは標準操作 S1 である．

④ $xA \in x$の両辺に x を作用させると，$x(xA) \in xx \Leftrightarrow (xx)A \in x \Leftrightarrow$ア：$A \in x$.

⑤ $x = xl$ の両辺に x を作用させると，$xx = x(xl) \Leftrightarrow x = (xx)l \Leftrightarrow$自明な操作 $x = l$.

⑥ $x \perp xl$ の両辺に x を作用させると，$xx \perp x(xl) \Leftrightarrow x \perp (xx)l \Leftrightarrow$単純操作イ： $x \perp l$.

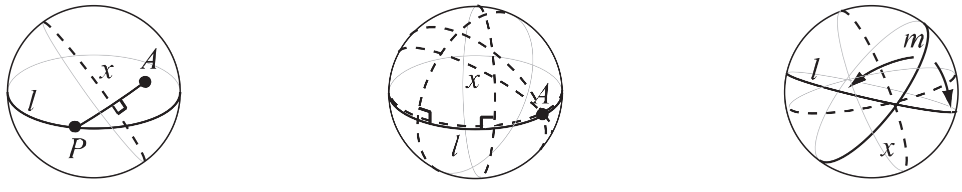


図 3.2　⑦ $xA \in l$（$A \notin l$）：オ　　⑦ $xA \in l$（$A \in l$）　　⑨ $m = xl$（$l \neq m$，S2）

⑦ $xA \in l$（$A \notin l$）は点 A が直線 l に乗るように直線 x を折ることである. 直線 l 上に点 P をとり, 点 A と結んだ線分 AP の垂直二等分線が解 x になる(図 3.2 左). $A \in l$ の場合は, $x \perp l$,

$A \in x$ および自明な操作 $x = l$ が解になるので→アとイ（図 3.2 中）．どのケースでも解があるので単純操作になる．$xA \in l$（$A \notin l$）を**オ**と表す．さらに，$xA \in l \Leftrightarrow A \in xl$ ⑧．
⑨ $m = xl$（$l \neq m$）は直線 l が直線 m に重なるように直線 x を折ることだから，2 直線のなす角の二等分線を折ることになり，図 3.2 右のように解は 2 つある．$l = m$ の場合は，$x \perp l$ と $x = l$ が解になるので→イ．$m = xl$（$l \neq m$）を**カ**と表す．これは標準操作 S2 である．
⑩ $m \perp xl$（$l \neq m$）の解は，図 3.3 左のように，m に垂直な直線 y を 1 本引いてから，l と y のなす角を二等分折りすることで求まる．y は無数に引けるので解も無数にある．$l = m$ の場合は，m（したがって l）に垂直な直線 y と l のなす角の二等分線が解になる．これは一般の位置の場合と同じ結果である（図 3.3 中）．$l \perp m$ の場合も一般の位置の場合と同じ結果になる．なお，図 3.3 右より→イ：$x \perp m$．$xl \perp m$（$l \neq m$）を**キ**と表す．

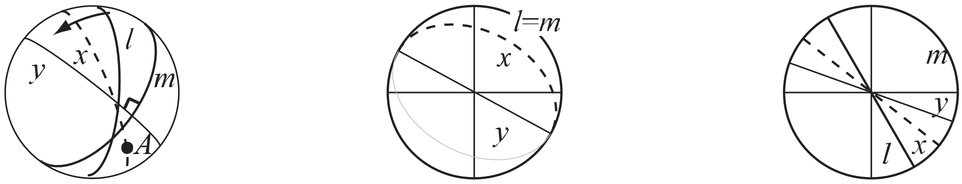
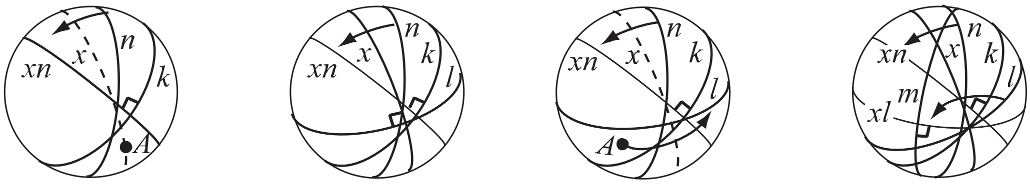


図 3.3　キ：$xl \perp m$（$l \neq m$）　$l = m$の場合→一般の位置　$l \perp m$の場合→一般の位置

4. 直線 x を折る単純操作の連立

命題 4. 1　球面作図の直線 x を折る基本操作は，命題 3.1 で得た標準操作 S1：$xA = B$（$A \neq B$），S2：$xl = m$（$l \neq m$），表 4.1 の S4 〜 S9 と以下の S10〜 S13 がすべてである．

S10　$A \in x \wedge xn \perp k$　　S11　$x \perp l \wedge xn \perp k$　　S12　$xA \in l \wedge xn \perp k$
S13　$xl \perp m \wedge xn \perp k$



S10　S11　S12　S13

図 4.1　直線 x を折る基本操作

$\wedge$	ア：$B \in x$	イ：$x \perp n$	オ：$xB \in n$	キ：$xn \perp k$
ア：$A \in x$	$\left.\begin{matrix}A \in x\\ B \in x\end{matrix}\right\}$ S5	$\left.\begin{matrix}A \in x\\ x \perp n\end{matrix}\right\}$ S4	$\left.\begin{matrix}A \in x\\ xB \in n\end{matrix}\right\}$ S6	$\left.\begin{matrix}A \in x\\ xn \perp k\end{matrix}\right\}$ ①S10
イ：$x \perp l$		$\left.\begin{matrix}x \perp l\\ x \perp n\end{matrix}\right\}$ S9	$\left.\begin{matrix}x \perp l\\ xB \in n\end{matrix}\right\}$ S8	$\left.\begin{matrix}x \perp l\\ xn \perp k\end{matrix}\right\}$ ②S11
オ：$xA \in l$			$\left.\begin{matrix}xA \in l\\ xB \in n\end{matrix}\right\}$ S7	$\left.\begin{matrix}xA \in l\\ xn \perp k\end{matrix}\right\}$ ③S12
キ：$xl \perp m$				$\left.\begin{matrix}xl \perp m\\ xn \perp k\end{matrix}\right\}$ ④S13

表 4.1　直線 x に関する単純操作の連立

証明　①$A \in x \wedge xn \perp k$．点 A を北極点に置き，北極星から見た図で説明する．北極点 Aを通る直線 x は経線であるから， x は真っ直ぐな直径に，直線 n は楕円の半分に見える（図 4.2(1)）．例えば k が赤道の場合，真っ直ぐの直径に見える k に垂直な大円（経線）が半楕円に見える xn と一致することはない．つまり xn は kと直交しない（図 4.2(3)）．したがって $A \in x \wedge xn \perp k$ には解がない．また，kが赤道である場合の真逆，つまり k が北極点を通る経線である場合には，図 4.2(4)のように， k に垂直な半楕円 xn が見つかるので $A \in x \wedge xn \perp k$ は解をもつ．このように， k が点 A 近く，正確には図 4.2(2)中央 xn の軌跡の空白領域を通る場合に解をもち, そうでない場合は解をもたない. よって①は基本操作である. これをS 10と表す．■

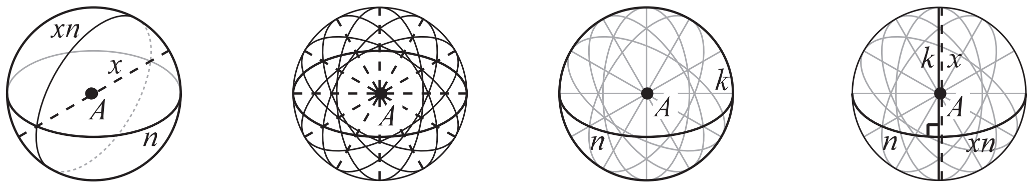


図 4.2　(1)xとxn　　(2)xnの軌跡　(3)k が赤道の場合　(4) k が経線の場合

同じ方法で残るS11～ S13を証明すると長くなるので双対性を用いた証明を与える．そのための補題を準備する.

補題 4. 1　(1)　$A \in l \Leftrightarrow A' \in l \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$　　　(2)　$l \perp m \Leftrightarrow \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{m}$

証明　点 $\boldsymbol{A} = \{A, A'\}$ は対極の位置にある 2 点の組で, 直線はその集合なので, 単一の点 A が大円 l 上にあれば A の対極点 A' も l 上にある。したがって，$A \in l \Leftrightarrow A' \in l$. $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$ は $A \in l$ かつ $A' \in l$ で定義されるので(1)がなりたつ．$\boldsymbol{l}$ と l は図形として同じものなので，(2)がなりたつ．■

補題 4. 2（[2]の命題 2）　(1)　$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{l} \Leftrightarrow \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{a}$　　(2)　$XA = xA$　　(3)　$Xl = xl$

補題 4.1 と 4.2 を用いて$A \in x \wedge xn \perp k$を書き換える．$A \in x \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{a} \Leftrightarrow X \in a$, $xn \perp k \Leftrightarrow \boldsymbol{xn} \perp \boldsymbol{k} \Leftrightarrow \boldsymbol{XN} \in \boldsymbol{k} \Leftrightarrow XN \in k$ となるので，①は $X \in a \wedge XN \in k$ と書き換えることができる．ただし，a は点 A の双対直線（大円）A_*，N は直線 n の双対点 n_* である．この連立方程式の解 X は， N を中心とする直線 k の 1/2 縮小像 $C_N(k)$と直線 a の共有点 $C_N(k) \cap a$ である．したがって長径が $\pi/2$の球面楕円 $C_N(k)$ と直径 π の大円 a の共有点の個数で①の解の数が決まる．S11～ S13の構成要素も同様に書き換えると, $x \perp l \Leftrightarrow X \in l$, $xA \in l \Leftrightarrow XA \in l$, $x \perp m \Leftrightarrow XL \in m$となるので, ② $x \perp l \wedge xn \perp k \Leftrightarrow X \in l \wedge XN \in k$の解は $C_N(k) \cap l$ となる．①の a が l に置き換わっただけなので，解の数は①と同じであることがわかる．③ $xA \in l \wedge xn \perp k \Leftrightarrow XA \in l \wedge XN \in k$は $C_A(l) \cap C_N(k)$ で, ④$xl \perp m \wedge xn \Leftrightarrow XL \in m \wedge XN \in k$ も $C_L(m) \cap C_N(k)$ で解の数が決まる．詳細は[4]参照のこと．■

5. 点 X を印す単純操作

命題 5. 1　点 X を印す単純操作は以下のケ～スがすべてである（図 5.1).

ケ：$XA = B$（$A \neq B$）　　線分 AB の中点に点 X を印す（2 個，S16）

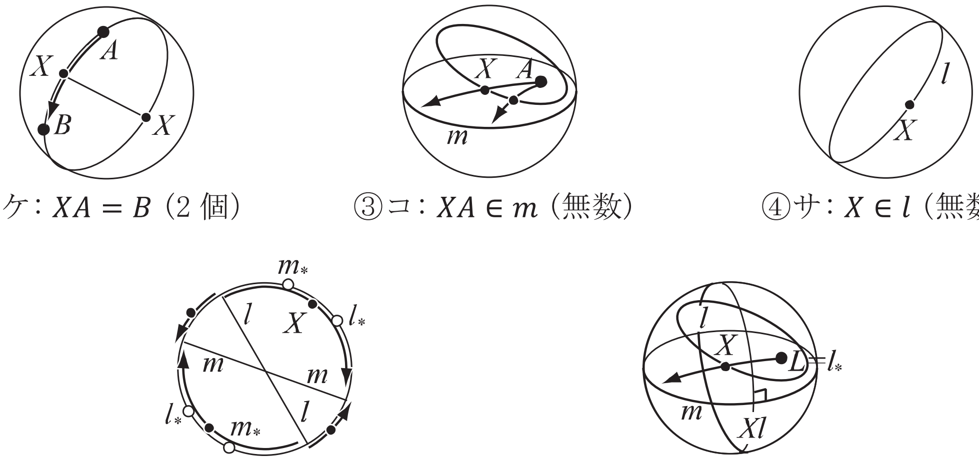
$B=A$の場合は，線分 AB の中点A，A' に点 Xを印す（2 個）
$B=A'$の場合は，赤道上に点 Xを印す（無数）

コ：$XA \in l$（$A \notin l$）　点 A 中心 l の 1/2 縮小像 $C_A(l)$ に点 X を印す（無数）
$A \in l$ の場合は，2 極点 l_* または l 上に点 Xを印す（無数）

サ：$X \in l$　直線 l 上に点 X を印す（無数）

シ：$Xl = m$（$l \neq m$）　線分$l_* m_*$の中点に点 X を印す（4 個，S17）
$m = l$ の場合は，l_*（2 個）および l 上に点 X を印す（無数）

ス：$Xl \perp m$（$l \perp m$でない）l_*中心 m の 1/2 縮小像 $C_{l_*}(m)$ に点 X を印す（無数）
$l \perp m$ の場合は，l, m 上に点 X を印す（無数）



①ケ：$XA = B$（2 個）　③コ：$XA \in m$（無数）　④サ：$X \in l$（無数）

⑤シ：$Xl = m$（4 個）　⑥ス：$Xl \perp m$（無数）

図 5.1　点 X を印す単純操作（0 次対象が一般の位置にある場合）

	B	XB	l	X	Xl
A	$A = B$※	$A = XB$ ①	$A \in l$※	$A = X$自明	$A \in Xl$ ③
XA		$XA = XB$#	$XA \in l$ ③	$XA = X$ ②	$XA \in Xl$#
m			$\left.\begin{matrix} m = l \\ m \perp l \end{matrix}\right\}$※	$m \ni X$④	$m = Xl$⑤ $m \perp Xl$⑥
X				無意味	$X \in Xl$ ⑦
Xm					$Xm = Xl$

表 5.1　点 X を印す操作

証明　X がない※や X が消滅する # を除いて番号順に表 5.1 を調べていく．まず，0 次対象が一般の位置にある場合を調べる．

①　$A = XB$（$A \neq B$）$\Leftrightarrow XA = B$ で，線分 AB の中点に点 X を印す．A から B への近い経路の中点とその対極点の 2 つが解になる．$A = XB$（$A \neq B$）を**ケ**と表す（図 5.1①）．

②　$XA = X \Leftrightarrow XXA = XX \Leftrightarrow A = X \Leftrightarrow$自明な操作.

③　$A \in Xl$（$A \notin l$）$\Leftrightarrow XA \in l$ は点 A と直 l 上の点を結んだ線分の中点に点 X を印すことで，無数の解をもつ（図 5.1③）．この単純操作を**コ**と表す．これは，点 A 中心に直線 m を 1/2 縮小した曲線 $C_A(l)$ 上に点 X を印すことである．

④ $X \in m$ は直線 m 上に点 X を印すことであり，無数の解をもつ．この単純操作を**サ**と表す（図 5.1④）．
⑤ $Xl = m$（$l \neq m$）の解は，l,m の双対点を結ぶ線分 $l_* m_*$ の中点である．双対点は 2 個ずつあるので，解は 4 個できる．$Xl = m$（$l \neq m$）を**シ**と表す（図 5.1⑤）．
⑥ $Xl \perp m$ は解きにくいので, 補題 4.1 と補題 4.2 を用いて書き換える. $Xl \perp m \Leftrightarrow \boldsymbol{Xl} \perp \boldsymbol{m} \Leftrightarrow \boldsymbol{XL} \in \boldsymbol{m} \Leftrightarrow XL \in m \Leftrightarrow$ ③より，$L = l_*$ 中心 m の 1/2 縮小像 $C_{l_*}(m)$ 上の任意の点が解で，無数ある．単純操作 $Xl \perp m$ を**ス**と表す（図 5.1⑥）．
⑦ $X \in Xl \Leftrightarrow XX \in XXl \Leftrightarrow X \in l \Leftrightarrow$ サ
　次に 0 次対象が特殊な位置にある場合を調べる．
①ケ：$XA = B$（$B = A$）の解は A と A' になるが，弧 AA の中点は近道すると A で，遠回りすると A' になる．つまり一般の位置の場合と同じ結果になり，別扱いしなくてよい．
$B = A'$ の場合は，A の双対点 A_*（公理 2）上の任意の点が $XA = B$ の解になる（図 5.2 右）．
③コ：$XA \in l$（$A \in l$）の解は，点 A の双対直線 A_*（公理 3）と l 上の任意の点（図 5.3）．
⑤シ：$Xl = m$ の特殊な位置は 2 通りある． $l = m$ の場合（図 5.4 左）は，l 上の任意の点と直線 l の 2 個の双対点 l_*（公理 2）が解になる．$l \perp m$ の場合は，弧 $l_* m_*$ の中点で一般の位置と同じ結果になる．
⑥ス：$Xl \perp m$（$l \perp m$）の解は l 上の任意の点と m 上の任意の点になる（図 5.5）．■

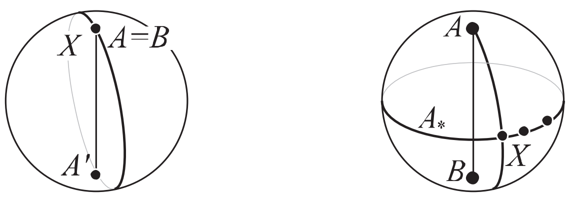


図 5.2 ケ:$XA = B$（$B = A$）(2 個)，$B = A'$ の場合（無数）

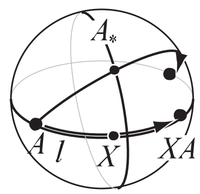


図 5.3 コ:$XA \in l$（無数 2 種）

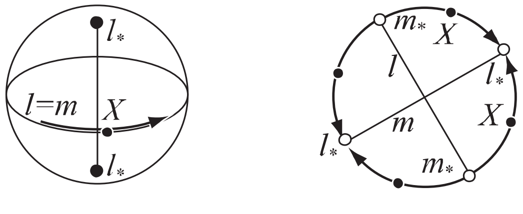


図 5.4 シ:$Xl = m$（$l = m$）(2 個, 無数)　　$l \perp m$ の場合（4 個）

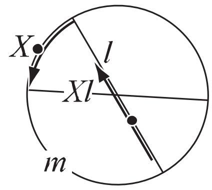
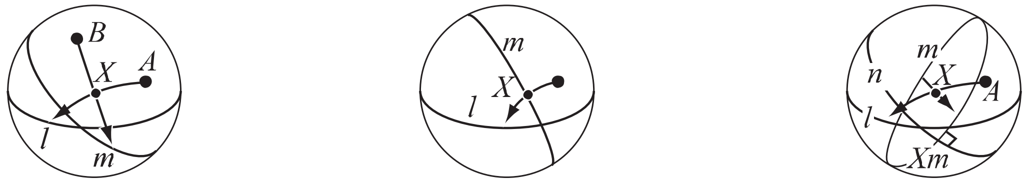


図 5.5 ス：$Xl \perp m$（$m \perp l$）（無数）

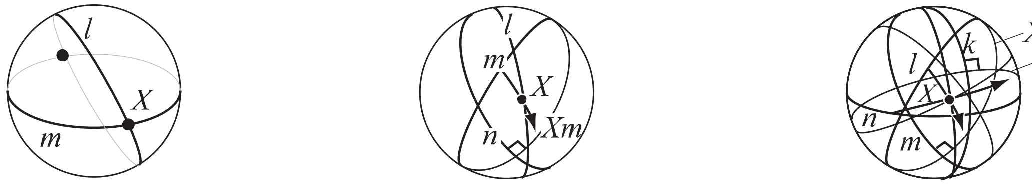
6. 点 X を印す単純操作の連立

命題 6.1　点 X を印す単純操作の連立により, 6 つの基本操作 S14 : $XA \in l \wedge XB \in m$, S15 : $XA \in l \wedge X \in m$, S16 : $XA \in l \wedge Xm \perp n$, S1 : $X \in l \wedge X \in m$, S17 : $X \in l \wedge Xm \perp n$, S18 : $Xl \perp m \wedge Xn \perp k$ が得られる（図 6.1）．

証明　点 X を印す単純操作で無数の解を持つものは, コ:$XA \in l$, サ:$X \in l$, ス:$Xl \perp m$ の 3 つで, その連立は S14 : コ ∧ コ, S15 : コ ∧ サ, S16 : コ ∧ ス, S1 : サ ∧ サ, S17 : サ ∧ ス, S18 : ス ∧ スの 6 つになる．■



S14：$XA \in l \wedge XB \in m$　S15：$XA \in l \wedge X \in m$　S16：$XA \in l \wedge Xm \perp n$



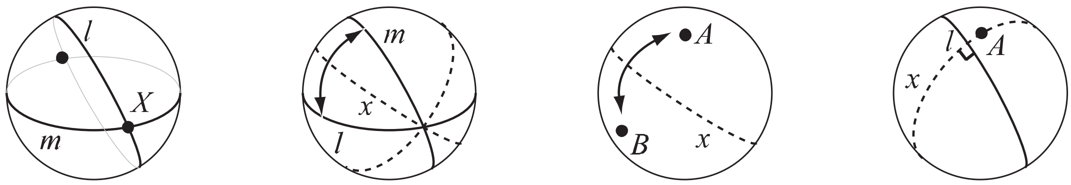
S1：$X \in l \wedge X \in m$　S17：$X \in l \wedge Xm \perp n$　S18：$Xl \perp m \wedge Xn \perp k$

図 6.1　点 X を印す基本操作

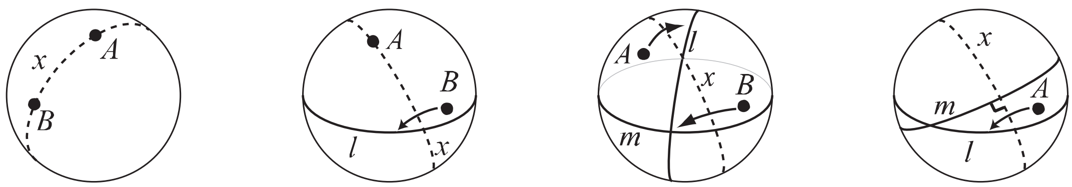
7. まとめ

命題 4.1 と命題 6.1 に，単独で基本操作となる $XA = B$（S19）と $Xl = m$（S20）を加えて，

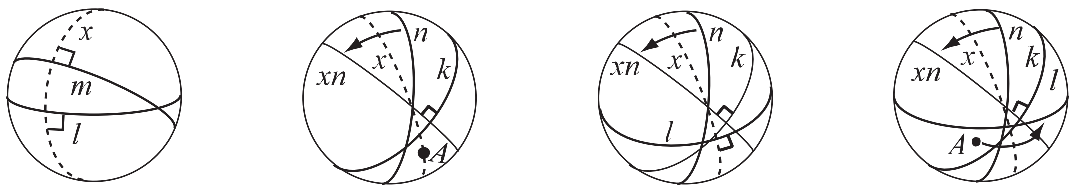
定理 7. 1　球面折紙作図には基本操作が 20 個（S1〜S20）存在する（図 7.1）.



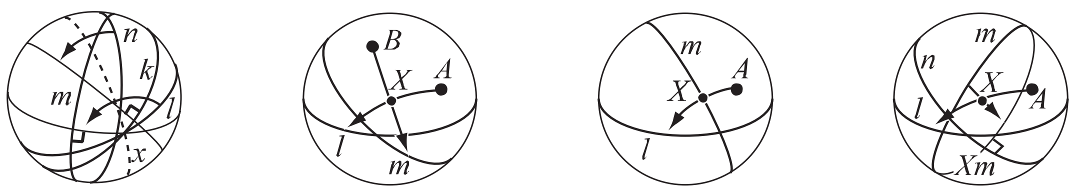
S1∶$X \in l \wedge X \in m$　S2∶ $xl = m$　S3∶ $xA = B$　S4∶$A \in x \wedge x \perp l$



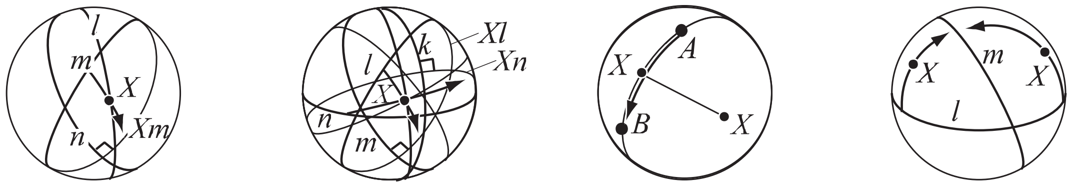
S5∶$A \in x \wedge B \in x$　S6∶$A \in x \wedge\ xB \in m$　S7∶$xA \in l \wedge xB \in m$　S8∶$x \perp m \wedge xA \in l$



S9∶$x \perp l \wedge x \perp m$　S10: $A \in x \wedge xn \perp k$　S11: $x \perp l \wedge xn \perp k$　S12:$xA \in l \wedge xn \perp k$



S13: $xl \perp m \wedge xn \perp k$　S14: $XA \in l \wedge XB \in m$　S15: $XA \in l \wedge X \in m$　S16 : $XA \in l \wedge Xm \perp n$



S17：$X \in l \wedge Xm \perp n$　S18：$Xl \perp m \wedge Xn \perp k$　S19：$XA = B$　S20：$Xl = m$

図 7.1 球面折紙作図の基本操作（S1〜S20）一覧

定理 7.2　球面折紙作図には 3 つの公理 A1〜A3（図 1.2）と 20 個の基本操作 S1〜S20（図 7.1）が存在する．

公理 A1〜A3 は基本操作のくり返しで実現できる．点 A の対極点に点 X を印す公理 A1 は，まず点 A を通る 2 直線 x,y を引く．つまり，$A \in x$，$A \in y$（$x \neq y$）．そして連立方程式 $X \in x \wedge X \in y$ を解くと点 A の対極点 Xが得られる．点 A を極にもつ赤道 x を折る公理 A2 は，$A \in y$，$A \in \mathrm{z}$（$y \neq \mathrm{z}$），$x \perp y \wedge x \perp z$ とすればよい．直線 l を赤道とするような極点に点 X を印す公理 A3 は，$x \perp l \wedge y \perp l$（$x \neq y$），$X \in x \wedge X \in y$とすればよい．このような単純操作や基本操作の「くり返し」は「連立」とは異なるものであり，通常の折り工程の定式化といえるもので，本稿に続く研究テーマとなるものである．

本稿では単純操作を連立させることで，[2]になかった 11 個の新たな操作を含む基本操作 S10〜S20 を得た．平面折紙作図[3]にある「平行」が減ったにもかかわらず，基本操作が増えたのは意外であった．その原因となる「$xl \perp$」,「$Xl \perp$」や点 X の作用の是非を知るためにも，高次元折紙作図（[1]）の本格的研究が待たれる．

参考文献

[1]　川崎敏和,「高次元の平坦折り紙について」, 佐世保工業高等専門学校研究報告, 第 25 号，187--195(1988).

[2]　川崎敏和,「球面折紙作の 4 つの基本操作」, 折り紙の科学, Vol.1, No.1(2011), 19-24.

[3]　川崎敏和,「平面折紙作図の基本操作の再構築」, 折り紙の科学(in press).

[4]　川崎敏和,「球面折紙作図の基本操作 $\boldsymbol{xA} \in \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{xB} \in \boldsymbol{m}$の解の個数について」, 折り紙の科学(in press).