

論文名 Title	球面折紙作図の基本操作 $xA \in I \wedge xB \in m$ の解の個数について	On Number of Solutions of the Fundamental Origami Operator $xA \in I \wedge xB \in m$ in Spherical Origami Construction
著者 Author(s)	川崎敏和	Toshikazu Kawasaki
受理年月日 Date of acceptance	2012/1/25	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2012/08/01 Vol. 2 No. 1 page 25-32	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

球面折紙作図の基本操作 $xA \in l \wedge xB \in m$ の解の個数について

川崎敏和

阿南工業高等専門学校 一般教科

Email: kawasaki@anan-nct.ac.jp

On Number of Solutions of the Fundamental Origami Operator $xA \in l \wedge xB \in m$
in Spherical Origami Construction

Toshikazu Kawasaki

Anan College of Technology, Anan, Tokushima, Japan

要約 与えられた 2 点 A, B と 2 直線 l, m に対して, A を l 上に, B を m 上に乗せるように同時に折る操作 $xA \in l \wedge xB \in m$ は平面折紙作図と球面折紙作図において最も重要な操作である. 本稿では, 点 A 中心に大円 l を $1/2$ に縮小した曲線 $C_A(l)$ を考察することで, 球面折紙作図の基本操作 $xA \in l \wedge xB \in m$ の解がいくつあるか調べる.

Abstract: For given points A, B and given lines l, m , the origami operation $xA \in l \wedge xB \in m$ such that we fold superposing A onto l and B onto m at the same time is the most important one for both planer origami construction theory and spherical one. In this paper, we study the orbit $C_A(l) = \{Q \in \text{sphere } S \mid Q \text{ is the middle point of the great arc } AP, P \in l\}$ and find how many solutions the fundamental origami operation $xA \in l \wedge xB \in m$ has.

Keywords: Origami construction, fundamental origami operation, Great circle, Pole, $XA \in l$

1. はじめに

阿部恒の任意角三等分折り (阿部[2]) に触発されて, 藤田文章は平面上の異なる 2 点 A, B と 2 直線 l, m に対して, 点 A を直線 l 上に, 点 B を直 m 上に乗せるように同時に折る操作である公理 7 を得た. 点 A を直線 l 上に乗せるような折り線は無数にあり, それらの包絡線が放物線になること, 公理 7 の折り線は 2 つの放物線の共通接線として定まり最大 3 本があることが知られている (藤田[1]). しかし共通接線の本数が決まる詳細な仕組みは整理されていなかった. 川崎は藤田の公理 7 を, 線対称移動 x を用いて, $xA \in l \wedge xB \in m$ と表現した. 直線 x に関する平面折紙作図の方程式でもあるこの表現は, そのまま球面直線である大円 x に関する球面折紙作図の方程式と解釈できる.

川崎[3]は, 球面上の点 A と対極に位置する点 A' からなる集合 $\{A, A'\}$ を太字 A で, A の集合としての大円を太字 l で, 対極に位置する 2 点を結ぶ線分 XX' を回転軸として 180 度回転する操作を X で表し, 球面幾何の双対性を用いることで,

- ・球面折紙の基本操作が 4 つにまとめられること,
- ・ $xA \in l \wedge xB \in m$ が $XA \in l \wedge XB \in m$ と同値であること,
- ・ $XA \in l$ の解は $X = \{X, X'\} = \{XA \in l \text{ の解}, XA' \in l \text{ の解}\}$ であること.

を示した.

本稿ではまず, 点 A 中心に大円 l を $1/2$ 縮小した曲線 $C_A(l)$ を定義し, その代数方程式を求める. そして, $XA \in l$ の解集合と曲線 $C_A(l)$ の関係を調べて, 球面折紙作図の基本操作

$xA \in l \wedge xB \in m$ の解の個数を求めていく.

注意 太文字は双対性を用いたことを表している. 点是对極の位置にある 2 点の組 $A = \{A, A'\}$ であり, 直線はその集合と考える. したがって, [3] で用いた表現 $A \subset x, B \subset x$ は不適切であり, $A \in x, B \in x$ とするのが正しい. ただ, 本稿で扱う点は通常の子点なので, どのみち \in になる.

2. 点 A 中心に大円 l を $1/2$ に縮小した曲線 $C_A(l)$

本節では, 方程式 $xA \in l \wedge xB \in m$ の解を求めるさい重要な役割を果たす曲線を導入して, その性質を調べていく.

定義 2.1 単位球面 S 上の点 A に対して, 点 A の対極点 A' を除いた球面上の任意の点 P を球面に沿って A に向かって $1/2$ に縮小する写像 C_A を $C_A(P) =$ 大円弧 AP の中点, で定義する. そして, この写像による直線 l の像を $C_A(l)$ と表す (図 2.1). ただし, 直線 l は点 A を通らないものとする (以下の注意参照).

注意 直線 l が点 A を通る場合は, $\lim_{B \rightarrow A} C_B(l)$ ではなく, 直線 l と l の双対点 l_* の和集合で $C_A(l)$ を定義する (図 2.2). なお, l の双対点 l_* は l を赤道としたときの 2 極点である. しかし $C_A(l)$ という概念は, $xA \in l$ の解の挙動を知るために導入するものであり, $A \in l$ の場合は, 方程式 $xA \in l$ が本来の役割を果たさないので考察の対象からはずしてよい.

例 2.1 大円 l が赤道, 点 A が北極点にあるとき, 曲線 $C_A(l)$ は点 A 中心で球面に沿った直径 $\pi/2$ の円になる (図 2.3).

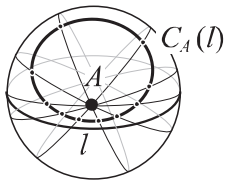


図 2.1

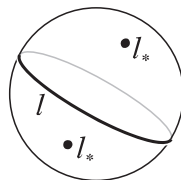


図 2.2

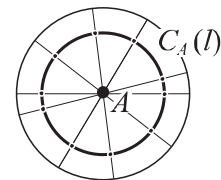


図 2.3

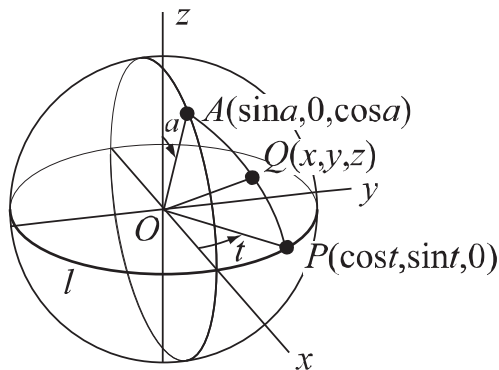


図 2.4

曲線 $C_A(l)$ の代数方程式を求めるために, 単位球面の中心を原点 O に, 点 A を xz 平面上 z 座標が正となるように置き, 直線 l が yz 平面に乗るように xyz 直交座標を定める. z 軸

と線分 OA のなす角度を a と表すと, $A(\sin a, 0, \cos a)$ となる (図 2.4). 点 A の z 座標を正としたので, $0 \leq a \leq \pi/2$ である. 大円 l 上の動点 P の x 軸からの偏角を t ($0 \leq t < 2\pi$) と表すと, $P(\cos t, \sin t, 0)$ となる. 弧 AP の中点 $Q(x, y, z)$ は, t を 0 から 2π まで変化させることで大円 l 上を一周する点 P の動きに合わせて, 曲線 $C_A(l)$ 描く

命題 2.2 曲線 $C_A(l)$ 上の点 $Q(x, y, z)$ は次の式で表せる.

$$(2.1) \quad x = \frac{\sin a + \cos t}{\sqrt{2(\sin a \cos t + 1)}}, \quad y = \frac{\sin t}{\sqrt{2(\sin a \cos t + 1)}}, \quad z = \frac{\cos a}{\sqrt{2(\sin a \cos t + 1)}}$$

証明 $\vec{OA} + \vec{OP} = \vec{OR}$ とおき, $\mathbf{a} = \vec{OA}, \mathbf{q} = \vec{OQ}, \mathbf{p} = \vec{OP}$ と表すと, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{p}| = 1$ なので, 四角形 $AOPR$ は菱形になる (図 2.5). 菱形の対角線 OR は弧 AP の中点 Q を通るので, \mathbf{q} は $\mathbf{a} + \mathbf{p}$ と同じ向きのベクトルなり, その大きさを割ると単位ベクトル

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{p}}{|\mathbf{a} + \mathbf{p}|}$$

が得られる.

$$(2.2) \quad \mathbf{a} + \mathbf{p} = (\sin a + \cos t, \sin t, \cos a)$$

$$(2.3) \quad |\mathbf{a} + \mathbf{p}|^2 = (\sin a + \cos t)^2 + \sin^2 t + \cos^2 a = 2(\sin a \cos t + 1)$$

この 2 式より (2.1) を得る. ■

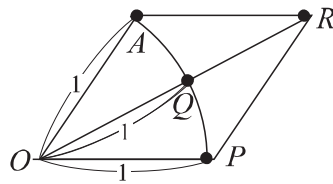


図 2.5

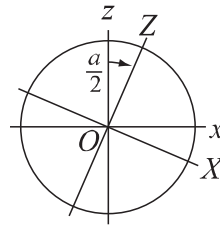


図 2.6

命題 2.3 y 軸右ネジの向きに xz 座標を $\frac{a}{2}$ 回転した座標を XZ 座標とすると (図 2.6),

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{a}{2} & 0 & -\sin \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \frac{a}{2} & 0 & \cos \frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(2.5) \quad X = \frac{\sin \frac{a}{2} + \cos t \cos \frac{a}{2}}{\sqrt{2(\sin a \cos t + 1)}}, \quad Y = \frac{\sin t}{\sqrt{2(\sin a \cos t + 1)}}, \quad Z = \frac{\cos \frac{a}{2} + \cos t \sin \frac{a}{2}}{\sqrt{2(\sin a \cos t + 1)}}$$

が成り立つ.

証明 (2.4) に (2.1) を代入すればよい. ■

命題 2.4 (2.5) から t を消去すると, XZ 平面上の双曲線 (2.6) と XY 平面上の楕円 (2.7)

$$(2.6) \quad -\frac{1 - \cos a}{\cos a} X^2 + \frac{1 + \cos a}{\cos a} Z^2 = 1$$

$$(2.7) \quad 2X^2 + 2\cos^2 \frac{a}{2} Y^2 = 1$$

が得られる. なお, $a = \pi/2$ のとき, (2.6)は $Z = \pm X$, (2.7)は $2X^2 + Y^2 = 1$ になる.

証明 (2.6)の左辺に(2.5)を代入して整理すると 1 になる. (2.6)に単位球面 S の方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を代入すると, (2.7)が得られる. $0 \leq a < \pi/2$ のとき(2.7)の Y^2 の係数 $2\cos^2 \frac{a}{2}$ は正であり, (2.7)は楕円になる. また, $0 \leq 1 - \cos a < 1$ より, X^2 の係数 $-\frac{1-\cos a}{\cos a}$ は負になる. Z^2 の係数 $\frac{1+\cos a}{\cos a}$ は正なので(2.6)は双曲線になる. $a = 0$ のときは $2Z^2 = 1$ で Z 軸に垂直な直線になる. ■

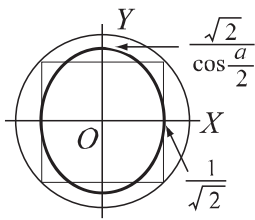


図 2.7

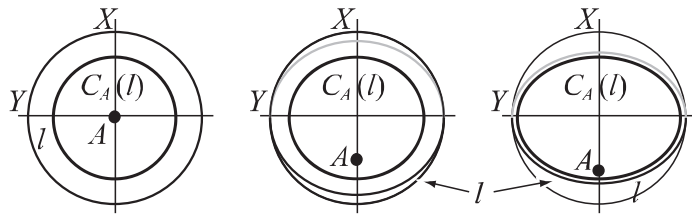


図 2.8

命題 2.5 XY 平面上の楕円(2.7) $2X^2 + 2\cos^2 \frac{a}{2} Y^2 = 1$ の短軸は X 軸で, a の値つまり点 A の位置と関係なく短径は $\sqrt{2}$ となる. 長軸は Y 軸で長径は $\sqrt{2}/\cos \frac{a}{2}$ で $\sqrt{2}$ 以上 2 未満の値をとる (図 2.7).

$a = 0$ のとき, 点 A は大円 l を赤道とする北極点に位置し, 楕円は長径=短径= $\sqrt{2}$ の円になる. 逆に a が $\pi/2$ に近づくと, 楕円は Y 軸方向に延びて長径は球面 S の直径の値 2 に近づいていく (図 2.8).

注意 a の変化に合わせて X 軸と Z 軸も回転する. 平面曲線としての楕円の方程式(2.7) $2X^2 + 2\cos^2 \frac{a}{2} Y^2 = 1$ と図 2.8 は, とともに移動する Z 軸正方向から見たものである. 球面楕円 $C_A(l)$ の球面に沿った短径は $2\sin^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/2$, 長径は $2\sin^{-1}(1/\sqrt{2} \cos \frac{a}{2})$ である.

3. 球面折紙作図の基本操作 $xA \in l \wedge xB \in m$ の解

本節では, 定義 2.1 で定めた曲線 $C_A(l)$ の性質を調べ, それらを組み合わせることで, $xA \in l \wedge xB \in m$ の解の個数を求めていく.

命題 3.1

(3.1) 曲線 $C_A(l)$ 上の任意の点 X の作用で点 A と点 A' はともに直線 l に乗る. すなわち, $XA \in l$ かつ $XA' \in l$.

(3.2) 方程式 $XA \in l$ の解の集合 = $C_A(l) \cup C_{A'}(l)$.

(3.3) $(C_A(l))' = C_{A'}(l)$.

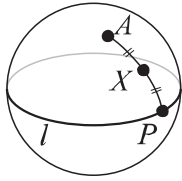


図 3.1

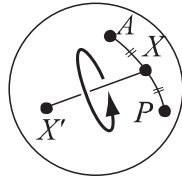


図 3.2

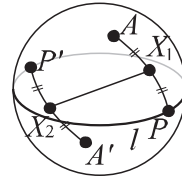


図 3.3

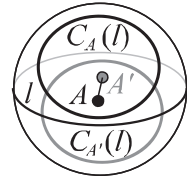


図 3.4

証明 (3.1)の証明：曲線 $C_A(l)$ から任意の点 X をとると、点 X は直線 l 上の点 P と A を結ぶ大円弧 AP の中点だから、 A と P が X に関して点対称になる (図 3.1). したがって、 $XA = P \in l$ となる. 図 3.2 のように、 X と X' は同じ作用なので、 $XA' = X'A' = (XA)' = P' \in l$. ■
 (3.2)の証明： $XA \in l$ の任意の解 X に対して、 l 上の点である XA を P とおくと、点 X は図 3.3 の X_1, X_2 のどちらかになる. 点 $X = X_1$ の場合は、 X は大円弧 AP の中点になるので、 $X \in C_A(l)$ である. $X = X_2$ の場合は、 X は大円弧 $A'P'$ の中点になるので $X \in C_{A'}(l)$ である. よって(3.2)がなりたつ. ■ (3.3)の証明： $C_A(l)$ と直線 l を原点に関して対称移動すると、 A は A' に移るが l は l 自身に重なるので、 A' と l で定まる $C_{A'}(l)$ は A と l で定まる $C_A(l)$ と同じ形であり原点に関して $C_A(l)$ と点対称になる. よって(3.3)がなりたつ. ■

命題 3.2 $XA \in l$ の解の集合 = $\{X = \{X, X'\} \mid X \in C_A(l), X' \in C_{A'}(l)\}$.

証明 命題 3.1 の(3.1)の証明より、 $XA \in l$ の解は $C_A(l)$ 上の点 X とその対極点 X' のペア $\{X, X'\}$ である. X が乗る曲線 $C_A(l)$ は直線 l で 2 分されてできた半球面のうちの点 A 側にあり、(3.3)より、 X' が乗る曲線は $C_{A'}(l)$ であり、点 A の反対側つまり A' 側にある (図 3.5). ■

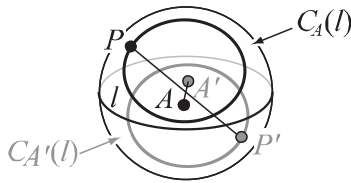


図 3.5

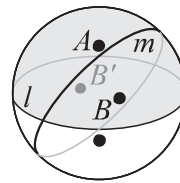


図 3.6

命題 3.3 単位球面 S 上の点 A と点 A を通らない直線 l , 図 3.6 のように、直線 l をはさんで点 A と同じ側にある点 B , 点 B を通らない直線 m に対して、連立方程式 $XA \in l \wedge XB \in m$ の解 $X = \{X, X'\}$ と $(C_A(l) \cup C_{A'}(l)) \cap (C_B(m) \cup C_{B'}(m))$ の対極の位置にある交点のペアは一対一にもれなく対応する.

命題 3.3 から、 $C_A(l) \cup C_{A'}(l)$ と $C_B(m) \cup C_{B'}(m)$ の交点の数を調べることで、 $XA \in l \wedge XB \in m$ の解の個数、ひいては $xA \in l \wedge xB \in m$ の解の個数がわかる.

定義 3.1 $C_A(l)$ で区切られた球面の 2 つの部分のうち点 A 側の閉領域を $D_A(l)$ と表す (図 3.7).

$D_A(l)$ は閉領域だから境界線 $C_A(l)$ を含み、短径が $\pi/2$, 長径が $2 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{a}{2}}$ の球面楕円面になる. 命題 2.5 より、長径は $\pi/2$ 以上 2 未満になるので、 $D_A(l)$ は常に直径 $\pi/2$ の球面円板 (曲面) を含む (図 3.8).

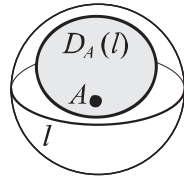


図 3.7

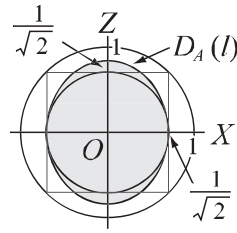


図 3.8

命題 3.4 $D \cup D'$ と $E \cup E'$ がそれぞれ対極の位置にある直径 $\pi/2$ の円板の和集合であるとき, $D \cup D'$ と $E \cup E'$ は共有部分をもつ.

証明 図 3.9 のように D の中心を北極点に, D' の中心を南極点に置くと, $D \cup D'$ の外側には赤道をはさんだ幅 $\pi/2$ の帯状領域 R が広がる. $E \cup E'$ を R に収まるように置くと, $D \cup D'$ と $E \cup E'$ は 4 点で接する (図 3.10). $E \cup E'$ を R からはみ出るように置くと, $D \cup D'$ と $E \cup E'$ は図 3.11 のようになる. どちらにせよ共有部分を持つ. ■

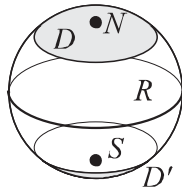


図 3.9

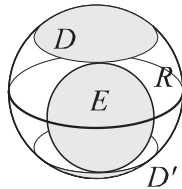


図 3.10

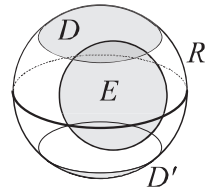


図 3.11

命題 3.5 $C_A(l) \cup C_{A'}(l)$ と $C_B(m) \cup C_{B'}(m)$ は共有点を有する.

証明 $D_A(l) \cup D_{A'}(l)$ と $D_B(m) \cup D_{B'}(m)$ が共有部分をもつことを示せばよい. 2 つの領域はそれぞれ命題 3.4 の和集合 $D \cup D', E \cup E'$ を含むので, $D_A(l) \cup D_{A'}(l)$ と $D_B(m) \cup D_{B'}(m)$ も共有部分をもつ.

命題 3.2, 命題 3.3, 命題 3.5 より次の定理を得る.

定理 3.1 方程式 $XA \in l \wedge XB \in m$ は少なくとも 2 つの解を持つ. 同値な球面折紙作図の基本操作 $xA \in l \wedge xB \in m$ も少なくとも 2 つの解を持つ.

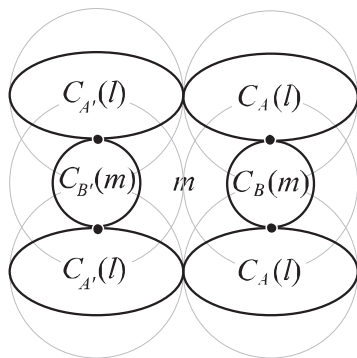


図 3.12

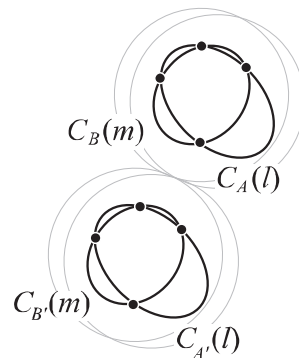


図 3.13

例 3.1 図 3.12 の点●は方程式 $XA \in l \wedge XB \in m$ の解を表す. この点は 4 個あるが, ななめの 2 個は対極に位置するのでペアで 1 つと数えなければならない. したがって方程式 $XA \in l \wedge XB \in m$ の解は 2 個である.

例 3.2 図 3.13 では, $C_A(l)$ と $C_B(m)$ が 4 ヶ所で交わる. 解も 4 個になる.

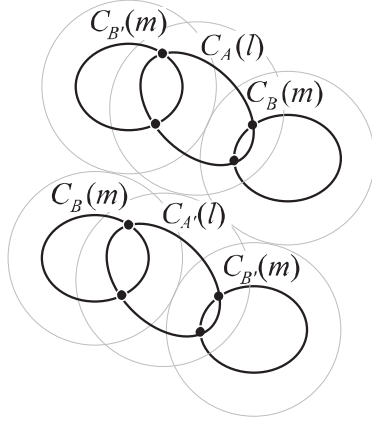


図 3.14

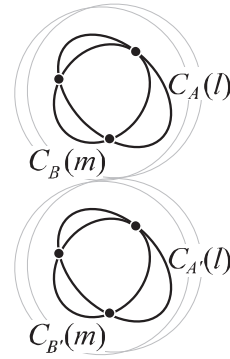


図 3.15

例 3.3 図 3.14 では, $C_A(l)$ と $C_B(m)$ は 2 か所で交わる. しかし $C_A(l)$ と $C_{B'}(m)$ も 2 か所で交わるので, 方程式 $XA \in l \wedge XB \in m$ は 4 個の解を持つ.

例 3.4 図 3.15 は, 図 3.13 の $C_B(m)$ を少しずらして $C_A(l)$ と接するようにしたものである. 共有点が 1 個減るので, 解は 3 個になる.

4. まとめ

平面折紙作図の基本操作 $xA \in l \wedge xB \in m$ は, 一般には図 4.1 のように, 放物線の共通接線として 3 つの解 x を持つことが知られている ([1]). ところが, 図 4.2 のように点 A と直線 l を l と垂直方向に平行移動した位置に点 B と直線 m があると, 共通接線が引けないので解がない. ななめに平行移動すると, 図 4.3 のように共通接線が 1 本だけ引けるので, 解は 1 個になる. わずかな違いで解の個数が変化する. このような解の個数の変化は, A, B, l, m が図 4.1 のような一般の位置にある場合には, 場合分けがややこしくて整理しづらい. 一方, 球面折紙作図では定理 3.1 や例 3.1~3.4 のように, 解が 2~4 個に変化する様が把握できる.

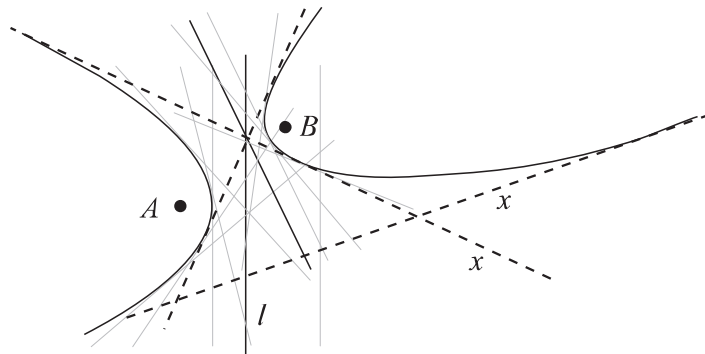


図 4.1

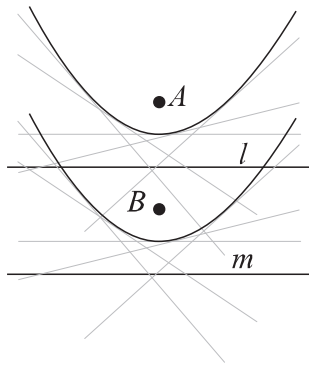


図 4.2

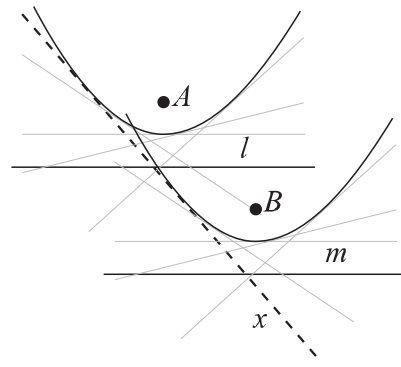


図 4.3

参考文献

- [1] Huzita, H. “Axiomatic Development of Origami Geometry.” In Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, edited by H. Huzita, pp. 143-158. Padova, Italy: Dipartimento di Fisica dell’Universita di Padova, 1991.
- [2] 阿部恒, 『すごいぞ折り紙—折り紙の発想で幾何を楽しむ』, 日本評論社, 2003
- [3] 川崎敏和, 球面折紙作図の 4 つの基本操作, 折り紙の科学, Vol.1, No.1(2011), 19-24.