

論文名 Title	可展性および平坦可折性を保持した (非) ディスク折紙の自由形状変形	Freeform Variations of (Non) Disk Origami Preserving Developability and Flat-Foldability
著者 Author(s)	館知宏	Tomohiro Tachi
受理年月日 Date of acceptance	2012/2/4	
掲載 First publish	『折り紙の科学』 (“Science of Origami”) 2012/08/01 Vol. 2 No. 1 page 45-58	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

可展性および平坦可折性を保持した (非) ディスク折紙の自由形状変形

館 知宏

東京大学 大学院総合文化研究科 広域システム科学系
153-8902 東京都目黒区駒場 3-8-1
tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

Freeform Variations of (Non) Disk Origami Preserving Developability and Flat-Foldability

Tomohiro Tachi

Department of General Systems Studies, The University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Meguro-Ku, Tokyo 153-8092, Japan

要約: 一枚の紙を折ることで得られるディスク同相あるいは非ディスクの三次元自由形状を得るための新規手法を示す。三次元上の既知の折紙パターンを初期形状とし、元々のパターンの持つ可展性と平坦可折性などの幾何的条件を保持しつつも、ユーザが直感的に自由変形バリエーションを作成できるデザインシステムを提案する。

Abstract: In this paper, I present a novel method to obtain a 3D freeform disk or non-disk surface that can be constructed by folding a sheet of paper, specifically a design system within which the user can intuitively vary a known origami pattern in 3D while preserving the developability and other conditions, such as flat-foldability, inherent in the original pattern.

Keywords: freeform, flat-foldable origami, developable surface, cylindrical origami

1 はじめに

折紙は、一枚の紙を伸び縮み・切り取り・貼り付けることなく、すなわち等長変形のみで形を作る手法である。この特性は、複雑な三次元形状を製作する上で応用することができよう。すなわち一つのパーツの非伸展加工で、ひとつながりの面で構築された形状の成形ができるということである。特に折り線どうしの連動による機構が製造過程を補助する、自己組み立てシステムとしての期待も高い。

工学的応用が可能な折紙には、吉村パターンとミウラ折り [1], Resch によるパターン [2], 風船基本形充填パターン (なまこ) [3] などの多角形の繰り返しタイリングによるものや、直線や曲線折りを平面で反転させるなどの方法で実現したもの (例: Huffman の concentric circular tower ([4]), Mosely の “bud” [5], Buri と Weinand のミウラ折りの変形 [6] など) がある。しかしながら、これらのデザインでは可展性を確保するために高い対称性に依存しているため、自由な三次元形状を作ることはできない。折った状態の三次元形状をコントロー

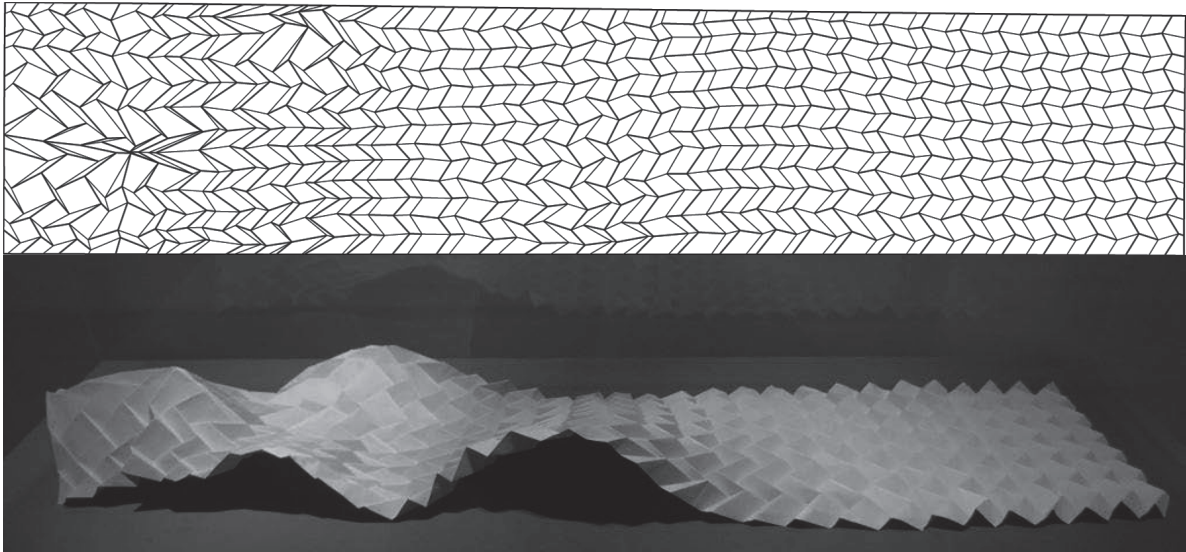


図 1: ミウラ折り変形の例

ルしカスタマイズできれば, 例えば建築応用ならば既存空間や設置条件にジャストフィットするような柔らかい応用方法が可能となり, 折紙の工学的応用範囲が広がるだろう。つまり, 三次元折紙を設計するという事は折紙作家にとっての目標であるのみならず, 折紙を応用するエンジニアやデザイナーにとっても重要な問題と言える。

汎用性の高い三次元形状の折紙設計手法としては, 著者によるオリガマイザがある [7]。オリガマイザでは, 与えられた多面体を元に展開図を作成するため, 目的形状に対する再現性は完全である。一方でこの手法はデザインの再現性・自由度を高めるために角度などの調整をする段折りを施すが, この段折りが互いの折りを互いに固定する折りにくい構造を作ってしまう。結果として一枚の紙からの製作プロセスは材料の柔らかさを大いに利用せざるを得ず, このままでは産業応用不可能である。

そこで, ミウラ折りや風船基本形充填パターンのように一枚の紙から連続的に折り出すことができるようなパターンに着目し, これらを一般化し有用な性質を保持したまま, インタラクションを通じて徐々に変形させていくことで欲しい形状を探すというデザインアプローチを提案する。工学的応用の見地からいけば, シートから作れる性質や折り畳める性質自体に意味があるので, 紙の輪郭形状は正方形に限定すること無く, また「筒型=穴の空いたディスク」などの非ディスク折紙についても扱う。なお, 本論文は [8] の論文の内容の和訳に, 新規に折紙の位相を拡張, 穴を含む折紙における可展性および平坦可折性条件を加えたものである。

2 折紙のモデル

折紙は平面領域との一対一の等長マッピングが存在するような曲面であり, 一般的にはなめらかな曲面を継ぎ合わせたもの¹となっている。ここでは, 曲線は多角形として近似し, 曲面

¹すなわち区分 G^1 級の曲面

を区分線形の形状つまり三角形メッシュとして扱う。折紙の形状はメッシュの各頂点の座標 \mathbf{x} (ここで n_{vert} を頂点の数として, \mathbf{x} は $3n_{\text{vert}}$ 次元ベクトルである) によって表される。必ずしも稜線は折り線を表さず, 稜線は, 山折り, 谷折り, それ以外の稜線に分類される。これら頂点座標の変数が, 可展性, 折り畳める折紙であれば平坦可折性などの折紙の幾何条件を満たすように拘束されているというデザインモデルを用いる。このほかに, 頂点の位置や用紙形状など個々の設計上によって必要となる幾何条件も同一のモデルに加える。個別の生成ルールを決めるのではなく, 折紙の持つ特徴的な性質や幾何条件を保持する自由なメッシュ形状として扱う。

2.1 局所的可展性

折紙は区分 G^1 級であるが全体としては G^1 不連続であり, 面の法線方向が不連続になる場所(折り線)を含む。多面体メッシュはそのような曲面の単純な例である。なめらかな曲面において可展性はガウス曲率が零であることを用いて表すが, このような曲面の「曲率」が定義されない場所では, 各内部頂点 k におけるガウス曲率の積分値であるガウス面積 G_k が零となることを用いる。これは, 単純に内角の和が一周して平面に展開すること, すなわち 2π となることで表現できる。

$$G_k = 2\pi - \sum_i \theta_{k,i} = 0, \quad (1)$$

ただし $\theta_{k,i}$ は頂点 k の i 番目の内角である。この離散的な拘束は, なめらかな可展面(平面, 柱面, 錐面, 接線曲面)に比べてより多様な形態バリエーションを許す。このなめらかでなごこそが折紙の形態の多様性の源と言っても良い。

2.2 大域的可展性

上記の可展性の議論は各点周りの局所的な性質のみを用いていた。ディスク同相の折紙の場合大域的な等長写像と各点周りの可展性は同値であるが, それ以外の位相では差異が存在する。穴の空いた紙と長方形の紙を丸めて作った円筒は, 両者ともに同じ位相であり各点において可展性を満たしているにも関わらず, 前者は大域的に可展であるが後者は大域的には可展ではない。大域的な可展性を必要とするか否かは, 設計上の目的に合わせて決定すべき問題であり, 例えば穴の空いたシート材を加工して折紙的加工をするのであれば必要とし, 加工して糊付けした結果筒型になるのであれば必要無い。

穴を含むディスクの大域的な可展性は, 各点の局所的可展性に加え, それぞれの穴を囲むように稜線をたどったループに対して下記の条件を与えることで与えられる

$$2\pi - \sum_i \theta_i = 0, \quad (2)$$

かつ

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \ell_i \begin{bmatrix} \cos \left(\theta'_i + \sum_{j=1}^{i-1} \theta_j \right) \\ \sin \left(\theta'_i + \sum_{j=1}^{i-1} \theta_j \right) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

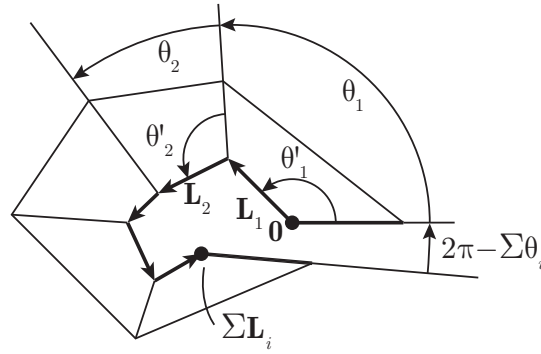


図 2: 穴周りの面の展開の両端の一致

ここで、 θ_i はループが横切る折り線の隣り合う角であり、 l_i はループ上の稜線の折り線の長さ、 θ'_i は前の折り線から次の折り線までの角度である (図 2)。式 (3) の左辺は穴周りの多角形の帯を平面に並べていったときに、始点から見た終点の位置であり、これが零となることで並進位置が一周で元に戻る事を示す。上記の 2 式によって、回転 (1 自由度, 式 (2)) と並進 (2 自由度, 式 (3)) を固定し、隙間無く展開する条件となる。ちなみに、閉じた頂点は $l_i = 0$ の穴と見なせ、式 (3) が自明に成り立つ。

2.3 紙の形状

しばしば、折紙は正方形や決められた凸多角形から折り出される。式 (1) ではこの条件を満たすことはできないので、用紙形状を保存するためには、幾何拘束を与える必要がある。用紙の境界上にある頂点 k に対し、

$$\sum_i \theta_{k,i} - \sum_i \theta_{k,i}^0 = 0, \quad (4)$$

かつ、境界上の全ての直線部分 j について、それらをなす長さ $l_{j,i}$ の稜線 i について、

$$\sum_i l_{j,i} - \sum_i l_{j,i}^0 = 0, \quad (5)$$

ここで $\theta_{k,i}^0$ は初期形状での頂点 k へ向かう内角であり、 $l_{j,i}^0$ は稜線 i の初期長である。紙の初期形状にこだわることに特に意味の無い場合の応用では、この条件は無視して、例えば用紙形状が凸形状になる (これによって効率的なパッキングがしやすくなる) などの条件を加えてもよい。

$$\sum_i \theta_{k,i} \leq \pi. \quad (6)$$

2.4 平坦可折性

ミウラ折り, 吉村パターン, 風船基本形充填, などのパターンでは、折り線が完全に折られた ($\pm\pi$ の折り角を持つ) 平坦な状態が存在する。このような状態を持つ条件、平坦可折性を満たす折紙は、コンパクトに折りたためるスペースや容器などへの応用が可能である。折紙

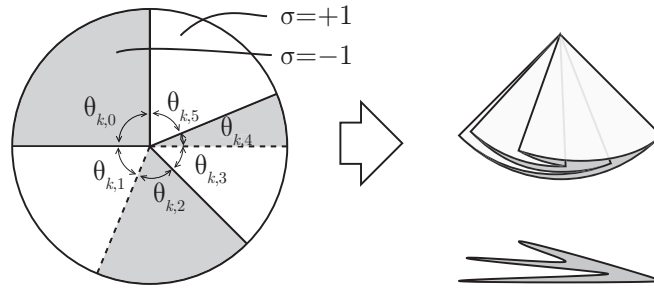


図 3: 平坦折り可能な頂点

の平坦可折性は、妥当な等長マッピングの存在と、妥当な折り重りの順番が存在することである。前者の条件は局所的には次のように表される (川崎定理 [9])。各内部頂点 k について

$$F_k = \sum_i \sigma_{k,i} \theta_{k,i} = 0, \quad (7)$$

ここで $\sigma_{k,i} = \pm 1$ は平坦に折られたときに面が表を向くか裏を向くかによって決定する、面に割り当てられた符号である。(図 3)。

平坦折りの場合は等長マッピングによって同じ座標に移される面どうしの重なり順も考慮されなければならない。面の重なり順に関しては多くの研究が成されている。Bern と Hayes [10] は一般的には折紙の妥当な重なり順を求める問題は NP 完全となることを証明している。実用的なアルゴリズムとしては目黒によるオリヒメ [11] が分割統治法によって、実際の折紙パターンに関して重なり順を高速に求める事に成功している。これらの正確な結果を導く手法は、あるパターンが正しいか否かを判定することはできるが、どのようにしたら正しいパターンを作れるかについての示唆がない。そこで、ここでは近似手法として、局所的な角の不等式を用い、局所的な干渉のみを取り除くアプローチをとる：隣り合う 4 つの折り線 $l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, l_{i+2}$ について、真ん中の 2 つの折り線 l_i および l_{i+1} が等しく山谷づけされているとき (ここでは一般性を失うこと無く山とする)、それらの内角 $\theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}$ (図 4 参考) は、次の関係を満たす

$$\theta_i \geq \min(\theta_{i-1}, \theta_{i+1}), \quad (8)$$

かつ、もし l_{i-1} が谷なら

$$\theta_i \geq \theta_{i-1} \quad (9)$$

もし l_{i+2} が谷なら

$$\theta_i \geq \theta_{i+1} \quad (10)$$

ここで、式 (8) は川崎 [9] による単頂点折紙の平坦可折条件の必要条件であり、式 (9,10) は局所的に閉じた頂点を回避するための経験的な条件である。

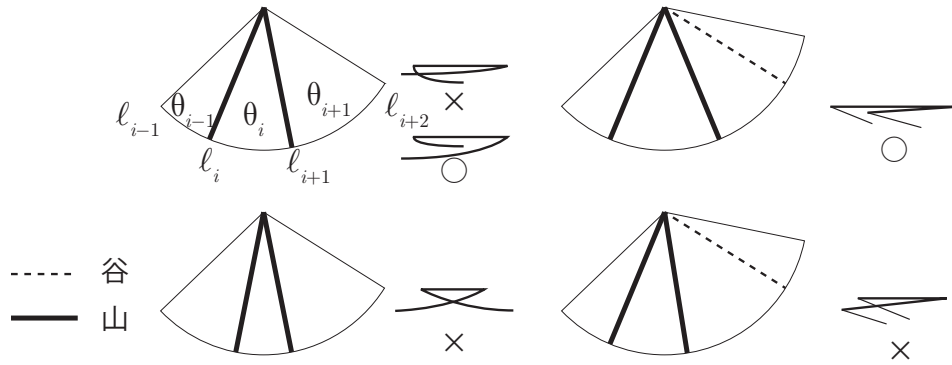


図 4: 平坦折り可能な頂点の角度不等式。左：川崎による必要条件。右：経験的に得た条件

2.5 大域的平坦可折性

非ディスク同相の折紙の場合の平坦折りについても、可展性と同様に局所的なものと同域的なものを定義できる。平坦可折性はコンパクトな折り畳みという応用を含意しているため、大域的な平坦可折性は重要なケースが多い。例えば、畳める円筒の条件は大域的な平坦可折性を必要とする。等長写像の存在のみに絞って考えれば、穴を含むディスクの大域的な平坦可折性は、可展条件と同様に、それぞれの穴を囲むように稜線をたどったループに対して、

$$\sum_i \sigma_i \theta_i = \begin{cases} 0 & (\text{山} - \text{谷} = 2 \pmod{4} \text{ のとき}) \\ \pm 2\pi & (\text{山} - \text{谷} = 0 \pmod{4} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (11)$$

かつ

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n \ell_i \begin{bmatrix} \cos \left(\sigma_i \theta'_i + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j \theta_j \right) \\ \sin \left(\sigma_i \theta'_i + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j \theta_j \right) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

が各点の局所的可折条件に加えられる。ここで、式 (11) の交代和はその穴に向かう山谷折り線の数によって、2 種存在することに注意が必要である。例えば、折り畳んだ単頂点の先端を切った穴であれば $\text{山} - \text{谷} = \pm 2$ になるし、ねじり折りを切り取った場合ならば $\text{山} - \text{谷} = 0$ となる。後者の符号は境界線がどちら向きかを示すので、初期形状の値を踏襲すれば良い。

2.6 折り角条件

局所的な面どうしの干渉を防ぐため、隣り合う面の折り角 ρ (ここで $|\rho| = \pi - \text{二面角}$) が $[-\pi, \pi]$ の範囲に収まる必要がある。(ここで、 $-\pi$ と π との違いがあるのが折紙の特質である。) 正確には、山谷の条件によって

1. 谷折りのとき, $0 \leq \rho \leq \pi$.
2. 山折りのとき, $-\pi \leq \rho \leq 0$.
3. 折り線以外の稜線, $-\alpha\pi \leq \rho \leq \alpha\pi$ ($0 \leq \alpha < 1.0$).

を満たすようにする。最初の二つの条件は折るべき方向の逆方向に折られないようにするものである。連続した折りのプロセスで山から谷に折りを変えるためには、折紙全体が展開される必要があるため、重要な条件となる。三つ目の条件は折り線を表現しない稜線、すなわち四角形あるいはそれ以上の領域の面を三角形分割することによって生じるもので、その角度は面の曲げ・振れを近似的に表している。つまり、 α ($0 \leq \alpha < 1.0$) が、面の柔らかさを表現していると考えることができる。(もし $\alpha = 0$ であれば、面は完全な剛体である)。

3 妥当な変形

以上の非線形拘束は繰り返し線形方程式を解くことで数値的に計算する。ニュートン・ラフソン法による最適化プロセスを一般化して解く。ここでは、 $f(\mathbf{x}) = 0$ および $g(\mathbf{x}) \leq 0$ を解く問題を、それぞれ $f(\mathbf{x})^2$ および $\max(g(\mathbf{x}), 0)^2$ のペナルティ関数の最小化と解釈する。これらの条件の停留条件をまとめ、各ステップにおいて $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ の等式を解く計算を行う。この最適化により、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ を満たす初期形状が得られる。

折紙のモデルでは拘束の数 n_c は変数の数 $3n_{\text{vert}}$ よりも少なく、拘束不足すなわち解不定の問題となる。このような多次元の解空間を持つシステムの解空間を探索するために、上記の特異解 (初期形状が条件を満たしている場合は初期形状) から、少しずつメッシュの座標値を変化させていく。このとき条件を満たす速度方向を繰り返し求めることで、数値積分する。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right] d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

ここで $n_c \times 3n_{\text{vert}}$ 横長行列 $[\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x}]$ は拘束のヤコビ行列である。上式を満たす微小変形 $d\mathbf{x}$ はヤコビ行列のペンローズ・ムーア一般逆行列 $[\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x}]^+$ を用いて下記のように解く。

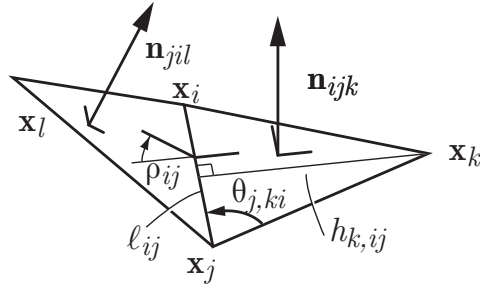
$$d\mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right]^+ \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right] \right) d\mathbf{x}_0, \quad (14)$$

ここで $d\mathbf{x}_0$ は任意の入力変形速度である。 $d\mathbf{x}$ は出力変形速度であり、頂点座標はこの値に沿って変化する。任意の入力 $d\mathbf{x}_0$ のベクトルを解空間に直投影するので、解のうち最も入力からの距離が近いものを与える式となっている。この仕組みを使って、 $d\mathbf{x}_0$ に対して、曲面を直接ドラッグするなどのユーザ入力による任意の変位を与えることができる。オイラー数値積分によって実際の形状を求める。このとき、各ステップごとニュートン・ラフソン法による数値誤差消去を行う。

$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right]$ の実際の値は内角 θ 、折り角 ρ 、稜線長さ ℓ の関数で表せる

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho} \right] \left[\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \ell} \right] \left[\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}} \right], \quad (15)$$

ここで、 $[\partial \theta / \partial \mathbf{x}]$ 、 $[\partial \rho / \partial \mathbf{x}]$ 、 $[\partial \ell / \partial \mathbf{x}]$ の要素は次のように表せる。図5のように、角 ijk を $\theta_{j,ki}$ 、三角形 ijk の法線を \mathbf{n}_{ijk} 。さらに ji の折り角を ρ_{ij} 、長さを ℓ_{ij} 、頂点 k から ji への

図 5: 頂点 i, j, k, l まわりの値

垂線の長さを $h_{k,ij}$, と表す。

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta_{j,ki}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\mathbf{n}_{ijk} \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_{j,ki}}{\partial \mathbf{x}_j} = -\frac{\mathbf{n}_{ijk} \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2} + \frac{\mathbf{n}_{ijk} \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta_{j,ki}}{\partial \mathbf{x}_k} = -\frac{\mathbf{n}_{ijk} \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|^2}; \quad (20)$$

であり,

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\mathbf{n}_{ijk}}{h_{k,ij}}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{x}_l} = \frac{\mathbf{n}_{jil}}{h_{l,ij}}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{-\cot \theta_{j,ki}}{\cot \theta_{j,ki} + \cot \theta_{i,jk}} \frac{\mathbf{n}_{ijk}}{h_{k,ij}} + \frac{-\cot \theta_{j,il}}{\cot \theta_{j,il} + \cot \theta_{i,lj}} \frac{\mathbf{n}_{jil}}{h_{l,ij}}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{-\cot \theta_{i,jk}}{\cot \theta_{j,ki} + \cot \theta_{i,jk}} \frac{\mathbf{n}_{ijk}}{h_{k,ij}} + \frac{-\cot \theta_{i,lj}}{\cot \theta_{j,il} + \cot \theta_{i,lj}} \frac{\mathbf{n}_{jil}}{h_{l,ij}}. \quad (24)$$

4 メッシュ修正

曲面を大きく変形させると、折り線どうしの干渉によって頂点が曲面上を移動できなくなる状態が発生する。このような状態は、曲面がとれる形状を制限するため、さらに変形を加えようと考えた場合折り線構造自体を変化させる必要がある。変形の限界は退化しつつある稜線で検出し、短すぎる稜線に対して稜線の端点二つを融合する操作、すなわちメッシュ単純化で用いられる edge collapse [12] の手法を適用する。可展条件だけでは無く、平

平坦可折条件を満たすパターンについて、このようなメッシュ操作が適当であるためには、折り線の山折りと谷折りの関係を考慮する必要がある。平坦折り状態を保つために、稜線と頂点に対して「山谷値」を設定し以下のルールを満たすようにする。ここで、稜線の実値は山折りなら -1 、谷折りなら 1 、折り線でなければ 0 であり、頂点の実値とは頂点周りの折り線の山谷値の合計である。

- 二つの稜線が融合したとき合流した稜線の実値はそれぞれの稜線の実値の合計とする。
- 融合した頂点の実値は -2 (凸) あるいは 2 である (凹)(前川定理)。
- 内部頂点は少なくとも 4 本の折り線の端点である。

これによって融合が可能なケースは以下の二つに絞られる (複号同順)

1. 実値 ± 2 の頂点と ± 2 の頂点が実値 ± 1 の稜線を消すことで融合し、実値 ± 2 の頂点となる。
2. 実値 2 の頂点と -2 の頂点が ± 1 の稜線を消すことで融合し、実値 ∓ 2 の頂点となる。

メッシュ最適化手法の多くでは、曲面をなめらかにするために稜線を入れ替える操作が行われる。折紙では逆に、なめらかでない事が造形に対して非常に重要であるから、この入れ替え操作は通常は行わず、折り線以外の稜線が強制的に平らに拘束されている ($\alpha = 0$) と時のみ行う。上記のようなメッシュ修正の手法は、折り線の接続を大きく変更し、異なる折紙のパターンを融合させたような表現が可能になる (図 8 右)。

5 実装

対話的なユーザインタフェースを介して多様な折紙の形態を探索するシステム Freeform Origami を構築した²。システム上では可展性・平坦可折性・頂点の一致等の幾何条件を指定し、三次元上での折紙の頂点を自由にドラッグするとそれらの条件をシステムがバックグラウンドで計算し、インタラクティブにデザイン変更を行うことができる。展開図と平坦可折性があるときは折り畳まれたパターンの X 線図が表示され、ユーザの編集を即座に反映する。本システムでは、設計モードとシミュレーションモードに 2 種類を切り替えることができるようになっている。設計モードでは、前述のデザインに必要な条件のみを保持するのに対して、シミュレーションモードでは稜線長を保持することで剛体折紙シミュレーションを行い、紙がどのようにふるまうかを確認することができる。

繰り返し計算の式 (14) を共役勾配法 (CG 法) を用い、高速に収束するシステムを実現している。システムは C++ で記述され、三次元画像表示には OpenGL, 数値計算には BLAS (Intel MKL) を用い、4 コアのノート PC (Intel Core i7 1.6 GHz) で 15×15 のミウラ折り (256 頂点モデル 452 拘束) を 1~5 fps で編集できる。

²<http://www.tsg.ne.jp/TT/software/> において無償公開している

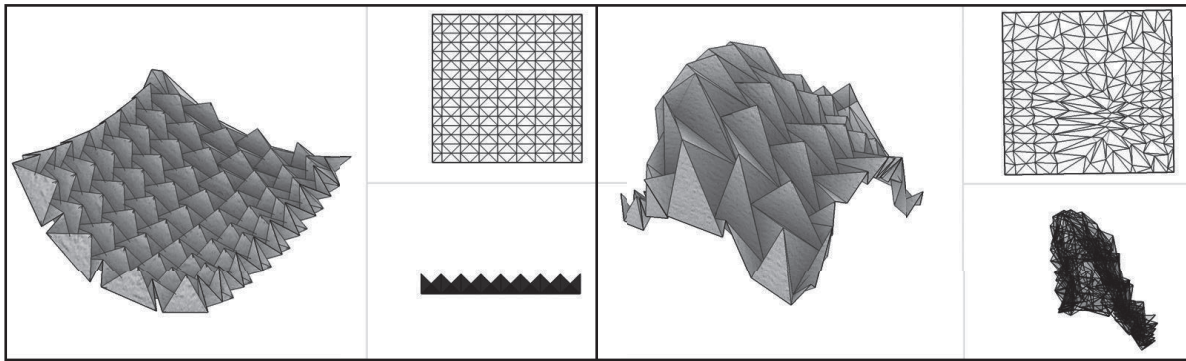


図 6: 風船基本形充填パターンのバリエーション 左: 元のパターン。 右: 複曲面を成す変形後の形態。画面はそれぞれ、左が三次元形状, 右上が展開図, 右下が平坦折り形状である。



図 7: 実際に紙で折ったバリエーションモデル。左: 平坦折り状態, 中: 三次元状態, 右: 展開状態

6 デザイン例

下記のように既存の折紙テセレーションパターンの一般化を得ることができた。

6.1 一般化風船基本形充填パターン

風船基本形充填パターンは三角形ベースの平坦可折パターンであり, 三次元的な筒状の曲面を形作る。このパターンは折紙作家によって用いられているが, その古い例は藤本修三の「なまこ」である [3]。展開構造物としても着目され, ステントグラフトへの応用も研究されている [13]。

提案手法を用い, 可展性・平坦可折性を保った自由変形によって形状を一般化できる (図 6)。この曲面は凸な頂点と凹な頂点によって構成されているため, 一般化した場合, 曲率の正負の変化が大きい三次元自由曲面を折紙で実現することができる。CNC カutting マシンを用いて実際に折った作例が図 7 である。

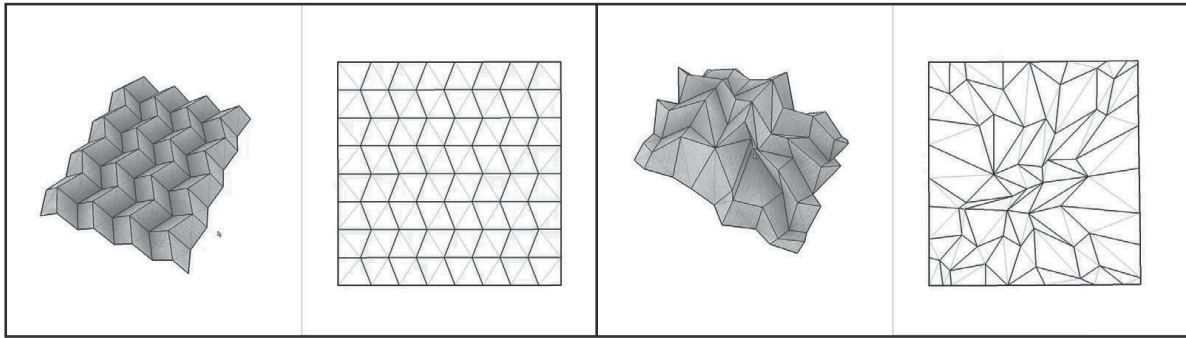


図 8: ミウラ折りの変形。左:ミウラ折り 右:変形パターン。折り線パターンのネットワークの位相が変化している。

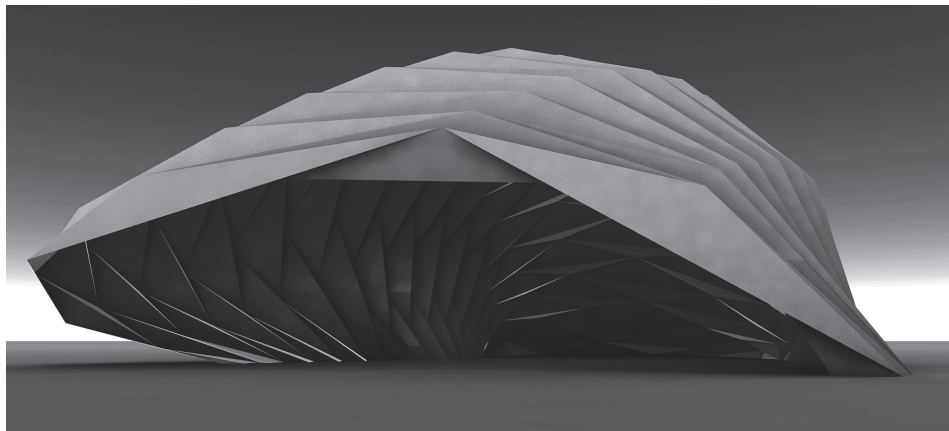


図 9: 吉村パターンのバリエーション

6.2 ミウラ折り

ミウラ折り [1] は四辺形ベースの平坦可折なパターンであり、三次元状態では平面にそった形である。図 8 にミウラ折りの自由変形バリエーションを示す。ここでは、用紙形状の条件 (4) と、用紙の弾性を再現するため稜線の折り角制限 $\alpha = 0.1$ を加えている。ミウラ折りは四価頂点で構成される平坦可折なパターンであるから、面の平坦性 $\alpha = 0$ に拘束すると、一自由度の剛体折り可能な構造になる [14]。

6.3 吉村パターン

吉村パターンは筒状に折りたたまれる三角形パターンである ([1] 参照)。全ての頂点が凸 (山谷値が -2) であるから、メッシュの修正法が働かず、曲面の平均曲率は正のままである。図 9 に吉村パターンの変形を使った折版シェルのデザインのイメージを示す。

6.4 Resch のパターン

Resch ら [2] によって提案された三角形を基本とする繰り返しパターンは可展であるが平坦折りできない曲面であるが、対応する三つの頂点が一箇所に集まることで、平坦な平面の

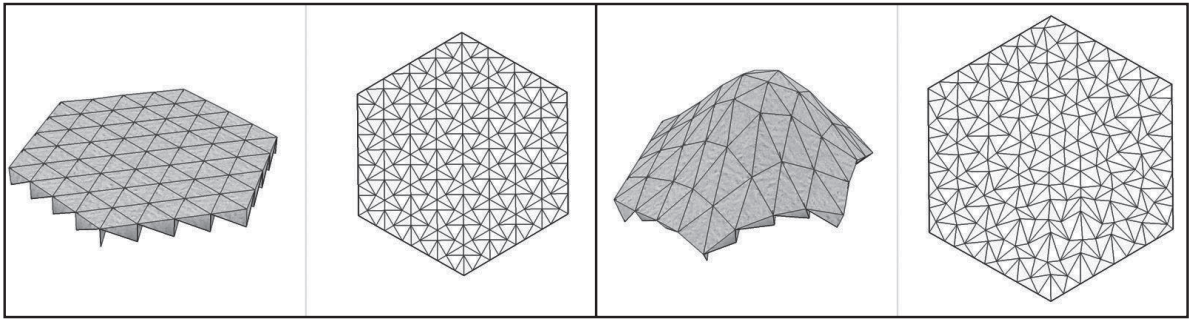


図 10: Resch のパターンの変形。左: オリジナル。右: 複曲面を構成するバリエーション

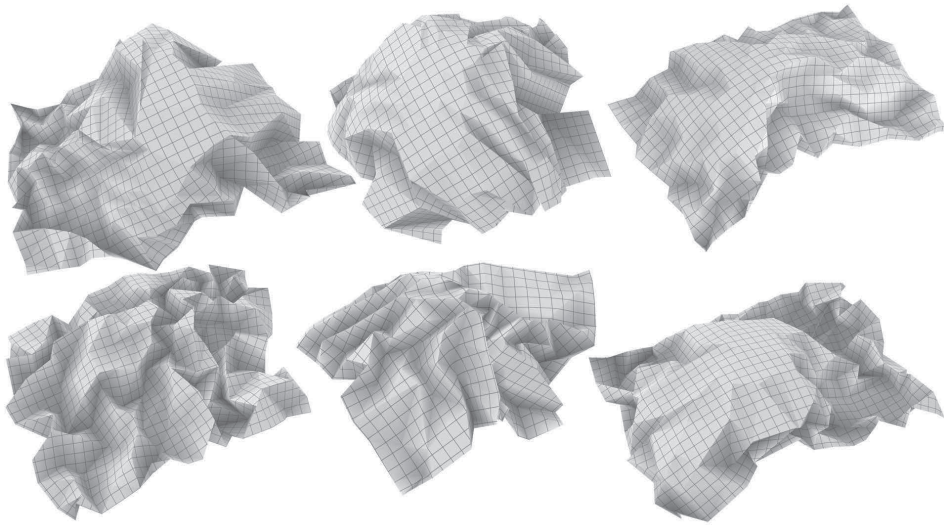


図 11: クシャクシャの紙の CG モデル

後ろに襞が飛び出るような複合的な形態を作る。このような性質は頂点座標の等式を拘束条件に加えることで、一般化することができる。一般化した形状は多面体表面のうしろに襞を作る構造となり、これはオリガマイザによる立体造形 [7] の特殊な場合と言える。

6.5 クシャクシャ

一枚の平坦な紙に折り線の方法を指定せず三角形メッシュを作り、可展性と用紙形状を保って変形させると不規則的に折り襞の付いた造形、すなわちクシャクシャにした紙をデザインできる。可展性が保たれるので、伸び縮みしないテクスチャを貼れ、クシャクシャの紙の表現ができる (図 11)。紙を伸びなしの条件で計算すると、もとの三角形メッシュの規則性が生まれてしまうため、本手法によってよりよい紙のクシャクシャ感を出せる。(図 12)。

6.6 折り畳める筒

ディスク同相でない折紙の例を示す。筒型をねじるようにして平坦折りできる折り目パターンが知られている (例: 野島 [15])。提案手法では、筒型も扱えるのでこのようなデザインも

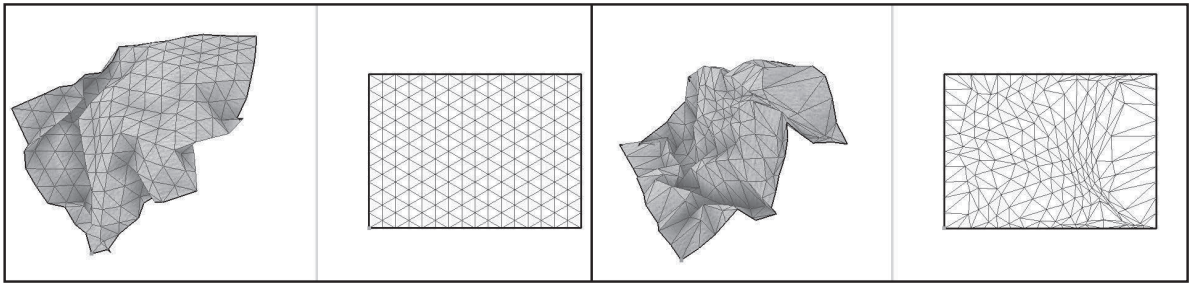


図 12: 左：規則的三角形メッシュ，右：不規則三角形メッシュ

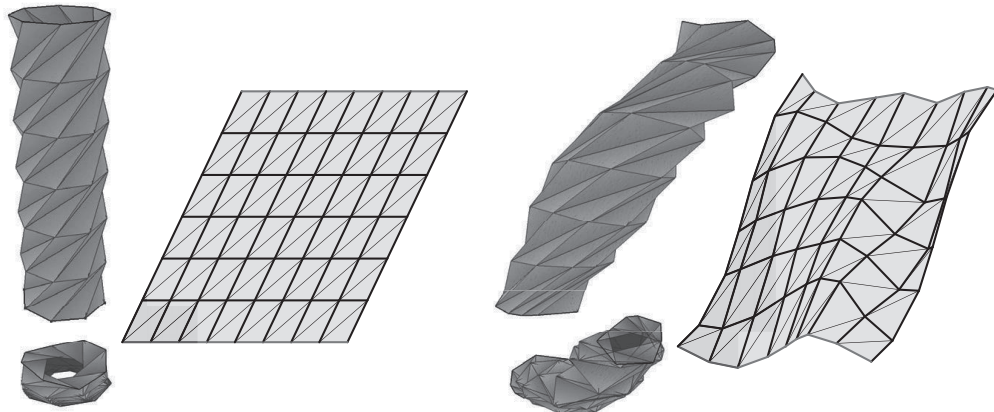


図 13: 左: 初期形状。右:不定型な折り畳める筒型構造。局所的可展性と大域的平坦可折性によって拘束して形状を求めている

一般化して非対称化する事が可能である。ここでは局所的な可展性，大域的な平坦可折性を幾何条件とする。前者が一枚の紙をのり付けすることで筒形状として作ることができること，後者がその構造体をそのまま潰せることを意味する。図 13 に作例を示す。

7 結論

本論では，折紙の幾何的拘束条件下の微小変形を数値積分することで，折紙の形態を一般化する手法を提案した。さらに，提案手法を実装し，曲率が自在に変化するような三次元曲面を折紙で実現した。これらの，折紙の幾何条件を満たすことで，一枚のシートからの加工，折り畳み・展開の可能性など工学的な性質を持った曲面設計が可能となる。特に，折紙の幾何条件を穴の空いたディスク形状に展開することで，折り畳める筒型折紙などの作例へと展開し，その応用性を高めた。

謝辞

本研究は日本学術振興会科研費 (22800009) および科学技術振興機構さきがけプログラムの助成を受けたものである。

文献

- [1] K. Miura, “Proposition of pseudo-cylindrical concave polyhedral shells,” in *Proceedings of IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structures*, 1970.
- [2] R. Resch and H. Christiansen, “The design and analysis of kinematic folded plate systems,” in *Proceedings of IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structures*, 1970.
- [3] 藤本修三, **創造性を開発する 立体折り紙**, 兵庫県学校厚生会, 1976.
- [4] E. Demaine and M. Demaine, “History of curved origami sculpture.” <http://erikdemaine.org/curved/history/>.
- [5] J. Mosely, “Curved origami,” in *SIGGRAPH 2008 Electronic Art and Animation Catalog*, pp. 60–61, ACM, 2008.
- [6] H. Buri and Y. Weinand, “ORIGAMI - Folded Plate Structures, Architecture,” in *10th World Conference on Timber Engineering*, 2008.
- [7] T. Tachi, “Origamizing polyhedral surfaces,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 16, pp. 298–311, March 2010.
- [8] T. Tachi, “Freeform variations of origami,” *Journal for Geometry and Graphics*, vol. 14, pp. 203–215, December 2010.
- [9] T. Kawasaki, “On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami,” in *Proceedings of the 1st International Meeting of Origami Science and Technology*, pp. 229–237, 1989.
- [10] M. Bern and B. Hayes, “The complexity of flat origami,” in *Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 175–183, 1996.
- [11] 目黒俊幸, “オリヒメ,” 2008. <http://www.geocities.co.jp/HeartLand-Oak/5487/>.
- [12] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle, “Mesh optimization,” in *Proceedings of ACM SIGGRAPH '93*, pp. 19–26, 1993.
- [13] Z. You and K. Kuribayashi, “Expandable Tubes with Negative Poisson’s Ratio and Their Application in Medicine,” in *Origami⁴*, pp. 117–127, 2009.
- [14] T. Tachi, “Generalization of rigid-foldable quadrilateral-mesh origami,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 50, pp. 173–179, December 2009.
- [15] 野島武敏, “異なる要素形状の組合せからなる折りたたみ可能な筒状構造 (異型筒及び角錐の折紙によるモデル化),” *日本機械学会論文集 (C編)*, vol. 68, pp. 1015–1020, 2002.