論文名 Title	2重折り紙による2の5乗根の作図	A geometric construction of the quintic root of two by two-fold Origami
著者 Author(s)	西村保三	Yasuzo Nishimura
受理年月日 Date of acceptance	2012/8/15	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2014/02/02 Vol. 3 No. 1 page 3-8	
備考 Note		

２重折り紙による２の５乗根の作図

西村　保三
福井大学教育地域科学部
910-8507，福井市文京 3-9-1
y-nishi@u-fukui.ac.jp

A geometric construction of the quintic root of two by two-fold Origami

Yasuzo NISHIMURA
Faculty of Education and Regional Studies, University of Fukui
3-9-1 Bunkyo, Fukui 910-8507, JAPAN

要約．通常の折り紙の作図では，５次方程式を解くことはできないことが知られている。本論文では，同時に２本の折り線を付ける手法によって２の５乗根を作図する方法を紹介する。
Abstract: It is known that a quintic equiation can not be solved by an ordinary Origami construction. In this paper we demonstrate a construction of the quintic root of two by two simultaneous folds.
Keyword: origami construction, two-fold, quintic root

１．はじめに

1980 年代，角の３等分と２の立方根を，折り紙によって作図する方法が，阿部 [2] とメッセル [3] によって示された。一般に，角の３等分と立方根が作図できれば，任意の３次方程式を解くことが可能となり，また３次方程式が解ければ，４次方程式も解くことができる。この事実は，1990 年代に複数の研究者によって相次いで発表されたが，実は 1936 年にベロッホ [1] によって既に証明されていた事実の再発見であった。

“藤田－羽鳥の公理” によって規定される折り紙の作図に，５次以上の方程式を解く能力がないことは，藤田とスキメニ [4] によって証明された。しかしここで複数の折り線を同時につける折り方－多重折り－を許せば話は変わってくる。同時に n 本の折り線をつける折り方を「n 重折り」と呼ぶことにする。2004 年にラング [5] は，２重折りによって角を５等分する方法を発見した。さらに，アルペリンとラング [6] は，多重折りの公理を研究し，直線の折り返しを使って方程式を幾何学的に解く “リルの手法”（1867 年）を応用して，一般の n 次方程式が $(n-2)$ 重折りで解けることを示した。従って，３重折りを使えば，５乗根の作図は可能である。アルペリンとラングは，５乗根は２重折りで作図できると予想したが，その方法は今まで発見されていなかった。

本論文では，２重折りによって「２の５乗根」が作図できることを示す。

２．多重折りについて

この節では，アルペリンとラング [6] による「多重折り」の考え方を紹介する。

折り紙の作図は,「紙を折る」という操作によって，折り線（直線）をつけることで，平面上に点や直線を構成することである。ただし，本稿において「紙を折る」とは，鶴を折るように次々折り畳んで立体図形を造形することではなく，１回折る度に紙を広げて，平面上に折り線（直線）をつける操作を意味する。

通常，折り紙の作図方法として許される操作は，“藤田-羽鳥の公理” と呼ばれる７種類の折り方によって規定される（[4] 参照)。それらは，平面上に既に存在している点や直線を指標として，点と点，点と直線または直線と直線を「重ね合わせる」ことで１本の折り線を新たに決める操作である。点や直線を重ね合わせる操作を「アライメント」と呼ぶ。点や直線に１本の折り線が関係するアライメントは５種類存在し，それらを組み合わせて１本の折り線を決める操作は，７種類（藤田-羽鳥の公理）存在することが知られている（[6, Definition 8] 参照)。

ところで藤田-羽鳥の公理による操作は，同時に複数の折り線をつける折り方は認めていない。例えば，紙を３等分に折るときなどに常用されている図 1 のような折り方は，ルール違反とみなされている。この折り方は，直線 l_1 を折り線 f_1 で折ってもう一つの折り線 f_2 に重ね, かつ直線 l_2 を折り線 f_2 で折って f_1 に重ね合わせるというアライメントによって，２本の折り線 f_1, f_2 を同時に決めている。このような折り方を「２重折り」と呼ぶことにする。

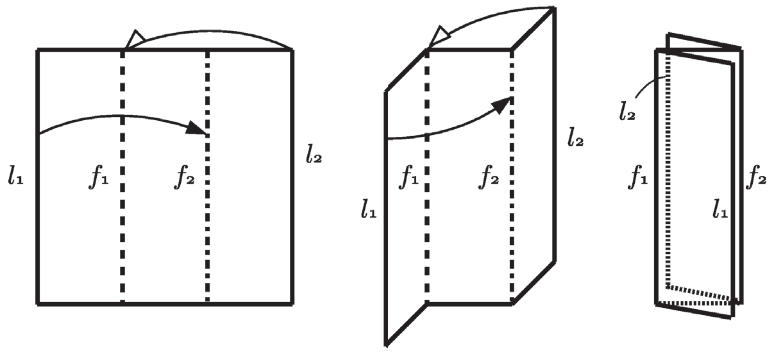

図 1: ２重折りによる３等分折り

定義１．平面内の点や直線を指標として，それらを重ね合わせることで，同時に n 本の折り線を決める操作を「n 重折り」と呼ぶ。また n 重折り（$n \geq 2$）をまとめて「多重折り」と呼ぶ。この呼び方では，藤田-羽鳥の公理による通常の折り方は「１重折り」ということになる。

「同時に複数の折り線を決める」という意味を，別の例をあげてもう少し詳しく説明する。図 2 の左図は，直線 l_1 を L_1 に，l_2 を L_2 に重ねるアライメントによって２本の折り線 f_1, f_2 を同時に決める２重折りであるが，現実には２つの折り線 f_1, f_2 が互いに干渉し合うため，１枚の紙では同時に折ることはできない。しかしここでは２重折りとは，あくまで理論上のもの

と考え，必要なだけ紙は分身を行い，同時に異なる方向に折ることもできると考える。これを実現する最もよいモデルは，図２の中央・右図に示すように，紙を２枚重ねて用いて，手前の１枚は f_1 で谷折り，向こう側の１枚は f_2 で山折りすることである。

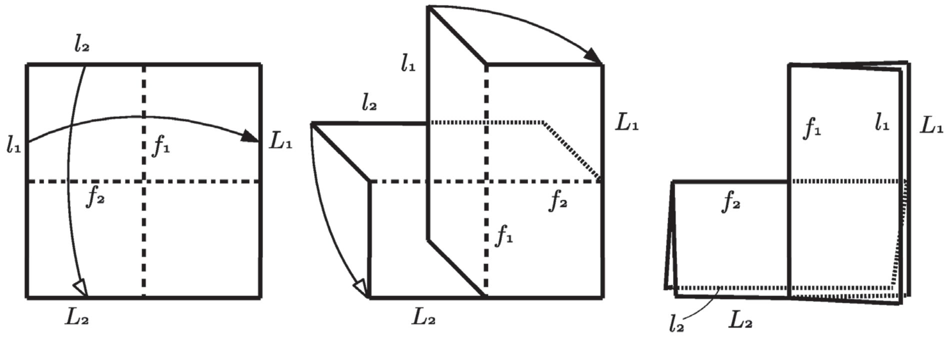

図 2: ２枚重ねの紙による２重折りの表現

ところで，図２の２重折りは，まず直線 l_1 を L_1 に重ねるように折り線 f_1 で折ってから，次に f_2 で折っても同じことで，独立な１重折り２つに分けられる。このような２重折りは「分離的」と呼ばれる。アルペリンとラング [6] によると，分離的なものを除いて，２重折りのアライメントは 10 種類あり，それらを組み合わせて２本の折り線を決める方法ー２重折りの公理ーは 489 種類存在する。図 1 はその１つで，[6] の記号では AL4ab で表される。

多重折りで作図可能な図形について，現在までに次の結果が知られている。

定理２（ラング [5]）. 任意の角を２重折りによって５等分できる。

定理３（アルペリン-ラング [6]，リルの方法 (1867 年)）. $n \geq 3$ のとき，一般の n 次方程式を $(n-2)$ 重折りで解くことができる。

特に５乗根は，定理３の方法で３重折りで作図できるが，２重折りで作図できるかどうかは今まで知られていなかった。

３. $\sqrt[5]{2}$ の作図可能性

次が本論文の主結果である。

定理４. $\sqrt[5]{2}$ は２重折りで作図可能である。

具体的な作図方法を示すことで，定理４を証明する。

命題５. 座標平面上に，２点 $P(0,2)$，$A(4/5, 12/5)$, 直線 $l: y = 2x + 2$ が与えられたとする。x 軸上の点 $Q(2t, 0)$ に対して，PQ の垂直２等分線を f_1 とし，直線 f_1 に関して l と対称な直線を f_2，直線 f_2 に関して点 A と対称な点を A' とする。点 A' の x 座標が 4 であるとき，$t = \sqrt[5]{2}$ が成立する。

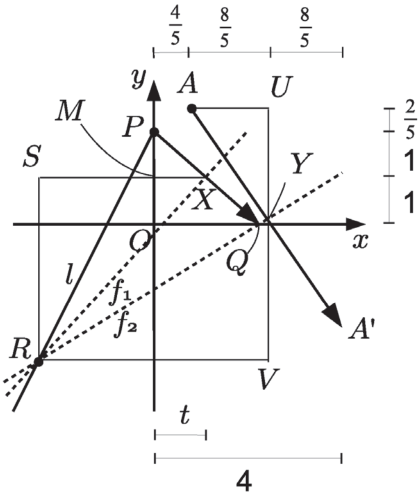

図 3: $t = \sqrt[5]{2}$ の証明

証明. 命題の条件を満たす点 A, P, Q, A' と直線 l, f_1, f_2 を図 3 に示した。さらに OP, PQ, AA' の中点をそれぞれ，M, X, Y とし，直線 l と直線 f_1 の交点を R とする。以下図に示すようにそれぞれの点から水平・垂直な線を引いた交点として点 S, U, V を決める。点 $Q(2t, 0)$ とするとき，$X(t, 1)$ であり，直線 f_1 の傾きは t である。

$\triangle MPX \backsim \triangle SXR$ より，$SR = tSX = t(SM + t)$，一方直線 l は傾き 2 であるから，$SR + 1 = 2SM$ である。従って，$t(SM + t) = 2SM - 1$ を解いて

$$SM = \frac{1 + t^2}{2 - t}, \quad SR = \frac{2t^2 + t}{2 - t} \tag{1}$$

が得られる。これより直線 f_2 の傾きを a とすると，

$$a = \frac{SR - 1}{SM + OQ} = \frac{2t^2 + 2t - 2}{2 - t} \bigg/ \left(\frac{1 + t^2}{2 - t} + t\right) = \frac{-2t^2 - 2t + 2}{t^2 - 4t - 1} \tag{2}$$

である。$\triangle VRY \backsim \triangle UYA$，$UA : UY = YV : RV = a : 1$ より，

$$UV = UY + YV = UA/a + aRV = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{a} + a\left(\frac{12}{5} + SM\right)$$

が得られる。一方 $UV = 7/5 + SR$ であるから，

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{a} + a\left(\frac{12}{5} + SM\right) - \left(\frac{7}{5} + SR\right) = 0. \tag{3}$$

(1)(2) で求めた SM, SR, a の値を (3) に代入して，

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{t^2 - 4t - 1}{-2t^2 - 2t + 2} + \frac{-2t^2 - 2t + 2}{t^2 - 4t - 1}\left(\frac{12}{5} + \frac{1 + t^2}{2 - t}\right) - \left(\frac{7}{5} + \frac{2t^2 + t}{2 - t}\right) = 0$$

左辺を整理すると

$$\frac{4(t^5-2)}{(t^2-4t-1)(t^2+t-1)}=0$$

従って $t=\sqrt[5]{2}$ である。（証明終わり）

折り線 f による図形 A の折り返しを $f(A)$ と表すことにする。直線 $y=0,\ x=4$ をそれぞれ m,n と表すとき，命題５の条件は，３つのアライメント $f_1(P)\in m$，$f_1(L)=f_2$，$f_2(A)\in n$ によって特徴付けられる２重折りによって実現できる（この２重折りはアルペリンとラング [6] の記号では，AL4a6ab で表される)。

以上で，２重折りによって $\sqrt[5]{2}$ が作図可能であることが示された。

４．実際の $\sqrt[5]{2}$ の作図手順

前節で理論的には $\sqrt[5]{2}$ が２重折りで作図可能であることが示されたが，２重折りを実際に行う場合は，紙の大きさの問題や，２本の折り線が干渉し合わないように紙の使い方を工夫する必要が生じる。この節では具体的な作図方法を示す。

縦横比 $1:2$ の長方形の紙 $ABCD$ を使用し，図４に示した比率に内分する位置に，直線 m,n と HG を作図する。直線 HG と m の交点を O とし，OH を $5:1$ に内分する点を P とする。点 O を原点，直線 m を x 軸とすると，直線 $n: x=4$, 点 $P(0,2)$ である。P を通る傾き２の直線を l とし，直線 l と n で山折りして，紙の両端を裏に折り込む。このとき折りこまれた A の座標は $(4/5, 12/5)$ である。

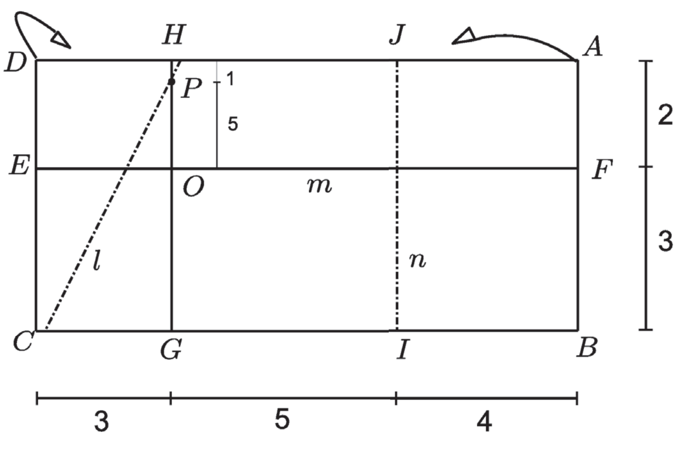

図 4: 直線 l,m,n, 点 P の作図

図５の状態で，上側の１枚だけを，点 P が直線 m に重なるように折り線 f_1 で手前に折り，同時に直線 n が点 A に重なるように折り線 f_2 で山折りして，紙の右端を裏側に折りこむ。このときに折り線 f_1 で折り返された直線 l が折り線 f_2 に重なるように折る（図６)。

紙を広げて折り線 f_2 と直線 m の交点を Q とすると（図５)，$OP:OQ=1:\sqrt[5]{2}$ である。

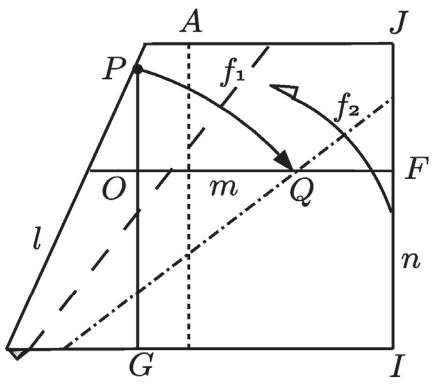

図 5: 折り線 f_1, f_2 で折る

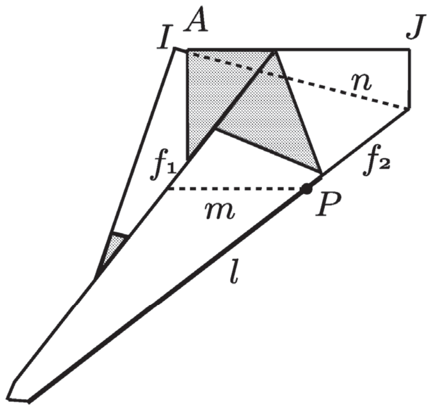

図 6: 折り畳んだところ

備考．筆者 [7] は，この方法を一般化して，任意の 5 次方程式の解が 2 重折りで作図可能であることを証明することができた。ただし一般の場合は計算が複雑になるため，実際に作図することは多くの場合困難である。

参考文献

[1] Beloch M.P., “Sul metodo del ripiegamento della carte per la risoluzione dei problemi geometrici”, Periodico di Mathematiche Ser. 4, 16 (1936), pp.104-108.

[2] 阿部恒，数学セミナー 1980 年 7 月号表紙，日本評論社.

[3] Messer P., “Problem 1054”, Crux Mathematicorum 12 no.10, Dec. 1986.

[4] Huzita H. and Scimeni B., “The algebla of paper folding (origami)”, Proc. 1st Internat. Meeting Origami Sci. Tech., Ferrara, Italy (1989), pp.215–222.

[5] Lang R.J., “Angle Quintisection”, (2004), `http://www.langorigami.com/science/math/quintisection/quintisection.php`.

[6] Alperin R.C. and Lang R.J., “One-, two- and multi-fold origami axioms”, in Origami^4 Pasadena 2006, International Meeting of Origami in Science, Mathematics, and Education, Lange R.J. ed., A K Peters, Natick MA, 2009, pp.371–393.

[7] Nishimura Y., “Solving quintic equations by two-fold origami”, 投稿中.