

論文名 Title	ファブリケーションのための 自由形状折紙テセレーション	Freeform 3D Origami Tessellations for Fabrication
著者 Author(s)	舘知宏	Tomohiro Tachi
受理年月日 Date of acceptance	2013/11/12	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2014/02/02 Vol. 3 No. 1 page 9-27	
備考 Note		

日本折紙学会  
Japan Origami Academic Society  
[www.origami.jp](http://www.origami.jp)

# ファブリケーションのための自由形状折紙テセレーション

館 知宏

東京大学 大学院総合文化研究科 広域システム科学系

153-8902 東京都目黒区駒場 3-8-1

tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

## Freeform 3D Origami Tessellations for Fabrication

Tomohiro Tachi

Department of General Systems Studies, The University of Tokyo

3-8-1 Komaba, Meguro-Ku, Tokyo 153-8092, Japan

**要約:** 多面体メッシュから半開状態の立体折紙テセレーションを生成することで、一枚のシート材を折って自由三次元形状を得る手法を提案する。まず多面体の面と面の間に三次元的なヒダ状の折り構造を挿入し、数値計算によって、可展性の条件、展開図の重なり回避、面の衝突の回避などの幾何的条件を満たすように頂点座標を調整する。頂点を共有する面が貫通しないようにするため、新規のペナルティ関数を導き、ファブリケーションを容易にするための折り角の制限と頂点角の制限を提案する。デザインとファブリケーションの実践を通して、本手法が金属シートの折りに対して有効である事を示す。

**Abstract:** In this research, we study a method to fold a sheet material into a freeform surface by generating families of half-folded origami tessellations from given polyhedral surfaces. We will achieve these patterns by first constructing an initial configuration of the tessellated surface by inserting folded tuck structures between facets and then by modifying the configuration by numerically solving geometric constraints including developability, crease pattern non-overlapping and facets collision. We derive a novel penalty function for avoiding intersections between facets sharing vertices, as well as the constraints for limiting fold angles and vertex angles to make the fabrication process easier. Through a practice of design and fabrication, we demonstrate the feasibility of our method applied for metal folding.

**Keywords:** origami tessellation, freeform, metal folding, Ron Resch

### 1 序論

折紙は伸び無し・切り込みなしの曲げと折りのみの変形は、金属・プラスチック・繊維・紙といった硬くて薄いシート材料をから複雑な立体形状へ加工する製造手法として応用可能性がある。設計された平面上のパターン加工で折り線を作成し、折りによって立体化するというものづくりの方法を、折紙ファブリケーションとして提案する。折紙ファブリケーションは、二次パターンによって最終的な三次元形状の多くが冗長に記述されるため、特に

建築スケールや宇宙構造物などの大スケールにおいては積層造形や切削造形より効率的な三次元造形方式としての発展可能性がある。また、折りによって近似的に実現可能な形状は鞍型やドーム型のような複曲面を含み、表現能力が高いため、建築や家具のように、デザイン上要求される形状のバリエーションが広く、大スケールにおける効率的な工法が求められる分野における応用可能性は高いと考えられる。

折紙による三次元造形を実現するためには、三次元からパターンを得る設計問題を解く必要がある。任意の三次元形状を一枚のシート材から折るために、与えられた多面体を「折紙化」し展開図を生成する手法は、*Origamizer* として著者が提案している [1]。この手法は、部分的に平坦折りできるヒダ状の構造 (ヒダ分子) を多面体を構成する多角形の間に入し、そのヒダ分子を段折りすることで、立体形状に沿うように角度調整を行うことで、一枚からの紙で多面体形状を実現するものである。しかし、ヒダ分子に見られる  $180^\circ$  の平坦折りした部分に段折りの折り線が重ねて加えられる構造は、機構学的に特異であり、結果として「留め折り」の効果を生む。最終形状に至るためには、材料の柔軟性を駆使して曲げおよび面内変形をさせながら折るというプロセスが必須である。金属シートのように硬い材料は、折り途中に過度な歪みや、折り線位置の連続的な移動、あるいは  $180^\circ$  の平坦な折りを許さないため、*Origamizer* 手法は用いることができない。

芸術分野と工学分野において、いくつもの半開状態の折紙が提案されている。たとえば、藤本による立体テセレーションや [2], PCCP シェルおよびミウラ折り [3], Huffman によるパターン [4], そして Resch による構造的パターンなどである [5]。本論では、1960 年代以降 Resch によって提案された立体折紙に着目する (図 1)。この形状を *Origamizer* 手法と同様の観点で観察すると、表面を構成する多角形と、その間に隠れるヒダ状の部分で構成されていると解釈可能である。このとき、Resch のパターンはヒダ部分が完全に隠れない半開状態においても成立するので、*Origamizer* 手法で得られる形状より、機構的な自由度があり、また折りやすい (図 2)。この半開状態は、留め折りを避けるだけでなく、その折り具合の変化によって複曲面を構成するのに寄与する。たとえば、図 1 のパターンはドーム状の正曲率の曲面を構成している。ただし、前述の Resch のパターンからは鞍型の曲面は作れない通り、同一のパターンから得られる三次元形状は限られている。そこで、欲しい複曲率の三次元形状を作るためには、必要な場所に必要な曲率を作るパターンが現れるような、折り線パターン自体の一般化・自由化が必要である。そこで、筆者はこれまで可展性の幾何条件の下で既存のパターンを少しずつ変形させて、自由なバリエーションを得るインタラクティブデザインシステム *Freeform Origami* を提案し、研究を報告した [6]。しかし、このシステムでは既存の折紙パターンを初期パターンとして入力する必要があるが、初期パターンをどのように得れば、欲しい三次元形状が得るのに適しているかについては考慮外であった。また、これまでの手法では面の衝突の回避について考慮がされておらず、本研究で目的とする複雑な折紙テセレーションにおいて頻繁に発生する面同士の衝突問題は未解決であった。

そこで本論では、Resch 風の折紙テセレーションを、自由曲面から生成する手法を提案し、シート材から折り変形によって成形する折紙ファブリケーションを実現可能とする。ま

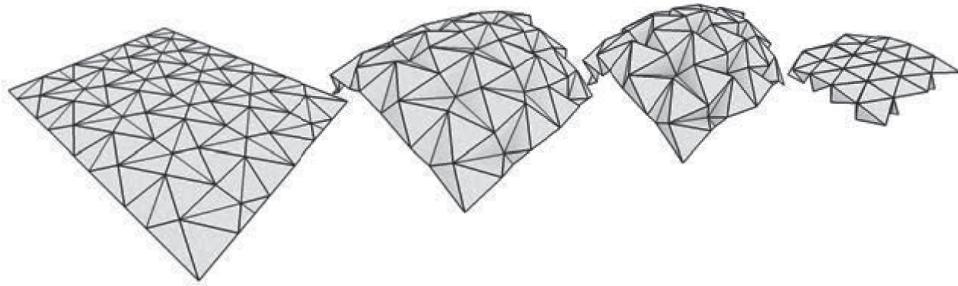


図 1: Resch による規則的な三角形メッシュパターン。

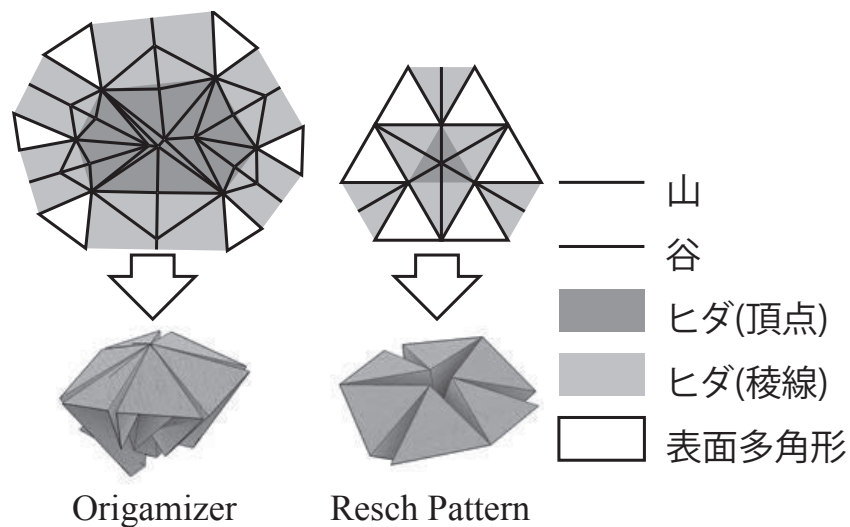


図 2: Origamizer と Resch のパターンの比較。両者とも，表面に現れる多角形と内側に隠れるヒダから構成されている。Resch のパターンは半開状態を許すが，Origamizer の頂点は段折りのために，ヒダが完全に閉じる。

ず，与えられた三次元の多面体メッシュに三次元状のヒダ構造を挿入して最終的なパターンと同トポロジーの初期形状を得る。次に，数値計算によって得られた形状から可展性の条件と面の衝突の幾何拘束を満たした形状を得る手法を示す(図 3)。最後に，ファブリケーションを容易にするための幾何条件を述べ，金属シートを使ったデザイン・ファブリケーションのプロセスを紹介しその妥当性を検討する。なお，本論文は [7] の成果を和訳したものに，ファブリケーションを容易にするためのパターンの調節方法を新たに加え，提案手法を用いたデザインおよびファブリケーションのプロセスに関する記述を加えたものである。

## 2 初期形状の生成

まず，多面体メッシュから，折紙テセレーションを生成する。入力メッシュの稜線のトポロジーは最終的な折り目パターンに反映されるので，たとえば既存の適切な再メッシュ法で

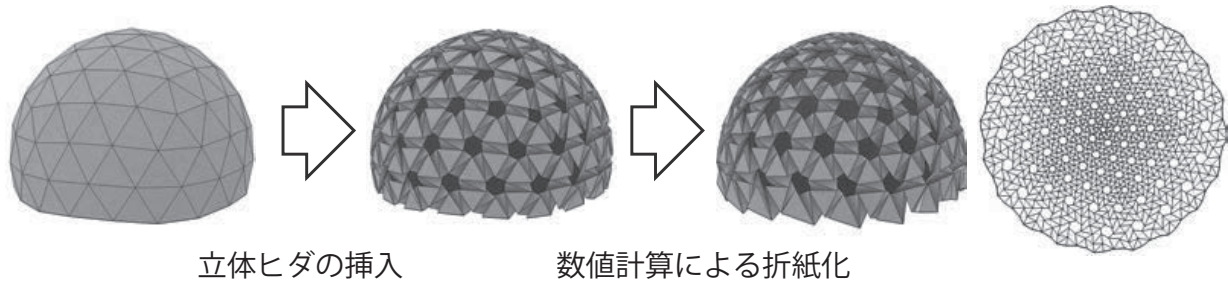


図 3: 自由形状折紙テセレーション生成のプロセス

均等な三角形・四角形メッシュとしておくなど、必要に応じて表現に適した構造を作っておく。この生成プロセスにおいては、山折り・谷折り線で作られるパターンのトポロジ的な正しさのみに着目し、実際に可展となるかはいったん無視する。

## 2.1 基本パターン

基本の折紙構造は星状のヒダ形状を各頂点に埋め込むことで得られる。この構造は風船の基本形 (の一般化) を中心軸で星形に開いた形であり、これを星ヒダと呼ぶこととする。まず、初期多面体メッシュのすべての頂点が偶数価であり、すなわちそれぞれの面が二色 (たとえば白と黒) で市松様に塗り分けることができる場合について考える。 $2n \geq 6$  本の稜線を持つ頂点に対して、波形の  $2n$  個の扇状の三角形メッシュからなる星ヒダを挿入する。ここで、扇の要にあたる頂点 (以降要頂点と呼ぶ) は、元の頂点位置から適当量背面にオフセットさせた位置にとる。星ヒダの挿入は、面と面の間を切り離すように行いが、このとき稜線の片方の頂点のみ切り離し、反対側はつながったままとする。このとき切り離される頂点は、頂点側から見て左側が黒で右側が白である側を選ぶ (生成プロセスで一貫していれば逆も可)(図 4 上)。一般の初期メッシュは奇数価の頂点を含むので、市松様には塗り分けられないので、それぞれの稜線ごとに面積を持たない二角形面を挿入することで、頂点の価数  $n$  を  $2n$  とし、元の面はすべて黒、挿入された二角形面は白として塗り分け可能とできる (図 4 下)。

一般的には、この生成手法のみでは可展のメッシュとはならないが、特殊なケース、たとえば平面上の正三角形、正方形、正六角形タイリングであれば、図 5 のように可展メッシュを作れることが保証される。このとき星ヒダの要頂点のオフセットの深さ  $d$  は、 $l$  を稜線の長さとして  $n$  を頂点価数とすると  $l \cot \pi/n$  となる。立体メッシュから発生させる一般の場合も、頂点隣接の稜線の平均長と価数から同式を使って  $d$  を得て、頂点における法線ベクトル方向に沿ってオフセットさせた点に要頂点を配置する。生成後、元のメッシュの構成面を独立に  $s$  倍 ( $0 < s \leq 1$ ) だけそれぞれの面の重心を中心としてパラメトリックに縮小させ、ヒダ部分が半開状態となるようにする。

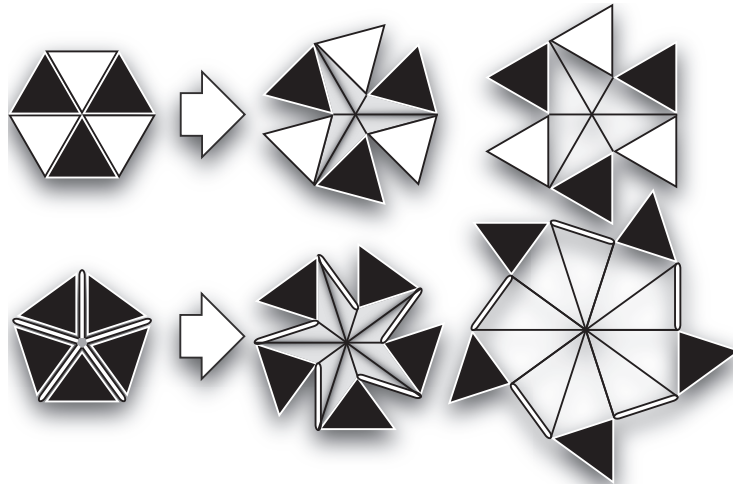


図 4: 上: 星ヒダの挿入 下: 各稜線に二三角形面を挿入することで, 奇数  $n$  価数を持つ頂点を  $2n$  価の頂点として解釈する。

## 2.2 バリエーション

図 6 に折紙テセレーションを作ることのできる 4 種のヒダ構造を示す。星ヒダ, 切頂星ヒダ, ねじり折りヒダは, Resch の提案の中に見いだすことができるが, ひねり星ヒダの例は無い。

**切頂星** 星形状の頂点を放射状に引っ張って引き延ばすように平らにする。すなわち  $n$  価の要頂点を平らな  $n$  角形に置き換え, 一つの谷折りを二つの谷折りで挟まれた細い三角形に置き換える。このときこの谷折りの折り角は左右に分割されて約半分となる。平らになった頂点部分の大きさは変更可能なパラメータである。後述の数値解法の中で, この部分が大きくなったり小さくなったりすることで様々な曲率の曲面へのフィットを可能としていることが観察できる。

**ひねり星** 星ヒダのそれぞれの三角形部分に折りを加えることで, ひねられた星形状を作る。ひねりを加えることで, 表面の多角形が引っ張られ, より高い曲率が実現できるようになる。切頂星と同様に, 数値解法のプロセスで, このひねり具合のパラメータが変化し, さまざまな曲率の曲面にフィット可能となる。

**ねじり折り** ひねり星形状の頂点を平らに押しつぶすことで, 平らな  $n$  角形に三角形のヒダが接続した形状が生まれる。ねじり折りの名の通り, この形状を完全に平坦とすれば, 通常のねじり折りとなる。この構造は, ねじりの角度と切頂の位置のパラメータが加わり, 曲面にフィットしやすくなる。

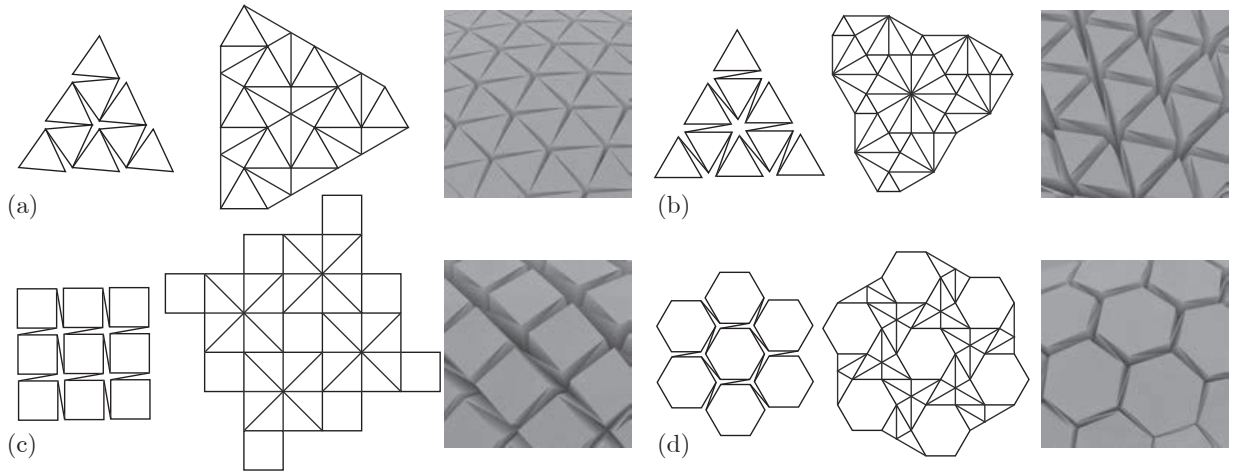


図 5: 正多角形メッシュから生成した折紙テッセレーション (a) 6 価頂点の三角形メッシュ (b) (c) (d) 二角形面挿入を施した三角形, 四角形, 六角形メッシュ

### 3 拘束の数値解

生成した初期形状から, 非線形方程式を数値的に解くことで正しい折紙形状, すなわち可展かつ交差のない多角形メッシュを作る。多角形メッシュはすべて三角形化して三角形メッシュとして表す。このシステムにおける変数は,  $n$  頂点の座標  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  であり,  $3n$  行のベクトル形式では  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T$  となる。一方拘束となる可展性条件は頂点ごとに 1 つの角度条件の方程式として表され, この変数と拘束のシステムは過変数であるため, 多自由度の改良域が得られる [6]。ただし, 可展条件のみを適用して形状を解くと頂点を共有する面同士が交差してしまい, 実際には折紙形状とはならない場合が多い。既存研究 [6] においては, 折り角を用いたペナルティ関数を用いていたが, これだけでは頂点を共有するが稜線を共有しない面同士の交差を防げない。さらに, 三角形面が非常に細いときに, このペナルティ関数が無限大となってしまい不安定となるという問題も含んでいた。そこで, 稜線あるいは頂点を共有する面同士の干渉を回避するための, 頑健なペナルティ関数を新規に提案する。

#### 3.1 可展性条件

ディスク状の三次元メッシュから平面への等長写像は, それぞれの内部頂点における角度条件で保証される。それぞれの  $n_v$  本の稜線からなる内部頂点  $v$  について,

$$g_v(\mathbf{X}) = 2\pi - \sum_{i=0}^{n_v-1} \theta_{v,i} = 0, \quad (1)$$

ここで  $\theta_{v,i}$  は  $v$  の周り  $i$  番目 ( $\text{mod } n_v$ ) の面の  $v$  における頂角である。この条件は, 形状が折紙であるための必要条件ではあるが十分条件ではない。すなわち, 展開図上で境界部分が互いに重なってしまい, 全単射とならない可能性があるからである。そこで境界部の

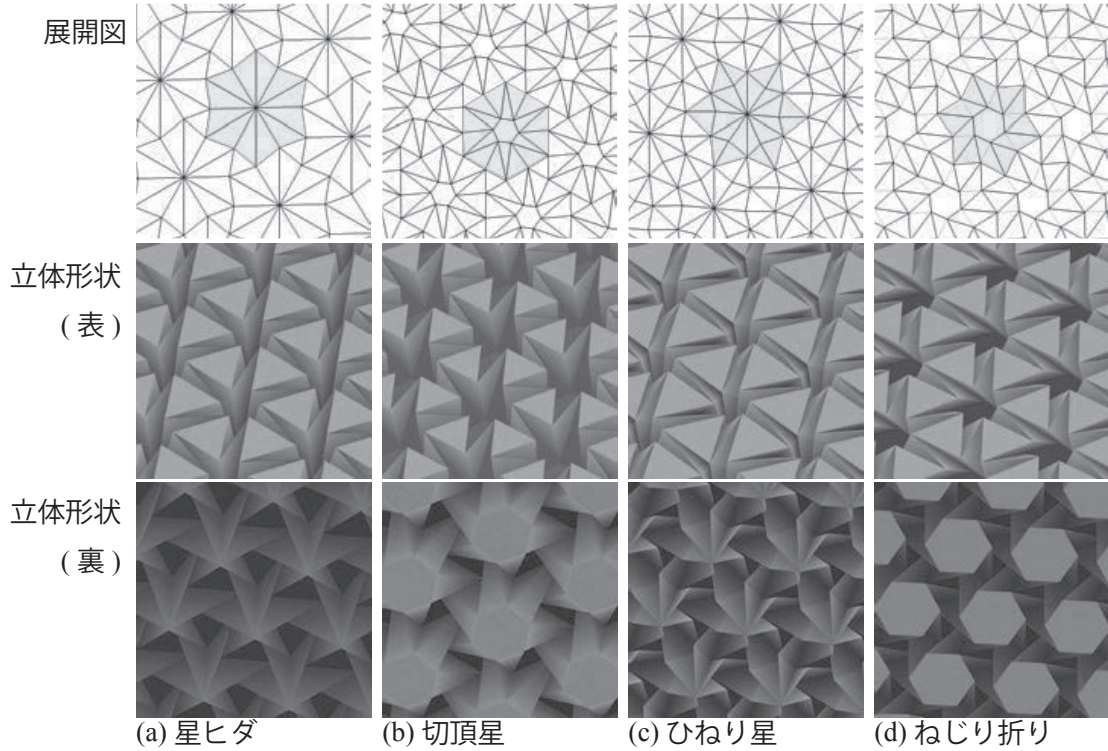


図 6: ヒダ構造のバリエーションを正則な三角形メッシュに施したもの

重なりを回避するために、角度ベース平坦化 (ABF)[8]における後処理と同様に下記の十分条件を用いる。まず  $n_0$  本の稜線のループである境界上の稜線を反時計回りに  $e_0, \dots, e_{n_0-1}$  と呼ぶ。この境界ループの任意の一部分において、 $e_i, e_{i+1}, \dots, e_j$  (ただし  $\text{mod } n_0$ )、外角の和は

$$b_{i,j}(\mathbf{X}) = \sum_{v=i}^{j-1} \angle(e_v, e_{v+1}) = \sum_{v=i}^{j-1} \left( 2\pi - \sum_{\ell=1}^{n_v} \theta_{v,\ell} \right) + \pi \geq 0 \quad (2)$$

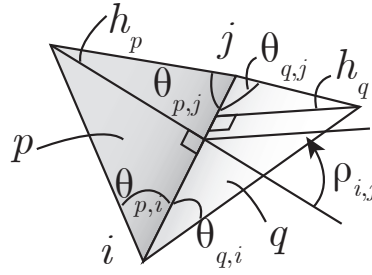
を満たす。この条件は、任意の境界稜線の組  $e_i$  と  $e_j$  がこの順で現れるときの反時計回り角度が  $-180^\circ$  を下回らないことと言い換えられる。なお、用紙を凸に限定する (すなわち正方形の紙から折れる) という条件を課す場合は、この角度が  $0^\circ$  を下回らないようにすれば良いが、本研究では、材料の境界形状は交差さえしなければ制限しないものとする。変曲点ごとに稜線の候補の組に対してチェックし、条件を満たさない組があれば  $b_{i,j}(\mathbf{X}) = 0$  の等式を拘束条件と課すことで、数値計算のプロセスでこの条件を解く。

### 3.2 交差の条件

交差する二面は、下記の 3 タイプに分類できる。

1. 稜線隣接面：稜線を共有する二面
2. 頂点隣接面：頂点を共有する (が必ずしも稜線を共有しない) 二面
3. 隣接関係のない二面



図 7: 稜線を共有する面  $p$  と  $q$  の組

タイプ 3 の大局的な面の衝突は、折紙に特有のものではなく、本提案手法においては実際前者二種類に比べて、出現することはまれである。また、このような大局的な衝突は、目視で確認してインタラクティブな形状操作で容易に避けることもできる。そこで、折紙において特有なタイプ 1 と 2 の局所的な交差について、これを回避する方法を考える。

### 稜線隣接面

稜線を共有する面の回避はシンプルであり、折り角すなわち隣り合う面の二面角の外角を  $[-\pi, \pi]$  の正しい範囲に収めれば良い。頂点座標のみで表されるメッシュは折り角  $\rho$  と  $\rho + 2\pi$  を区別できない、すなわち  $-\pi - \delta$  および  $\pi - \delta$  が区別できないから、折り線における山折りと谷折りの割り当ての情報を使って、谷折りは  $(-\pi/2, 3\pi/2]$ 、山折りは  $(-3\pi/2, \pi/2]$  の範囲にあると見なす。この上で、谷折りと山折りをそれぞれ  $[0, \pi]$  および  $[-\pi, 0]$  に収まるようにペナルティ関数を設定して解けるようにする。

この条件のもっとも単純な表現は、折り角の差を直接用いる [6]。すなわち、折り角  $\rho$  の折り線が限界角度  $\rho_{limit}$  を超えているとき、 $\rho_{i,j} - \rho_{limit}$  を評価する。しかし、この計算は三角形が細く縮重し法線方向の信頼性が落ちたとき、 $\rho$  が定義不可能となるという安定性の懸念がある。そこで下記のような条件を用いて不安定性を回避する。

$$f_{p,q}(\mathbf{X}) = 2 \left( \sin \frac{\rho_{i,j}}{2} - \sin \frac{\rho_{limit}}{2} \right) h_p h_q = 0, \quad (3)$$

ここで  $h_p$  と  $h_q$  は共有する  $e_{i,j}$  に対する、三角形  $p$  と  $q$  それぞれの高さの相対値である (図 7)。これは、下記のように表記できる。

$$f_{p,q} = \frac{2 \left( \sin \frac{\rho_{i,j}}{2} - \sin \frac{\rho_{limit}}{2} \right)}{\cot \theta_{p,i} \cot \theta_{p,j} \cot \theta_{q,i} \cot \theta_{q,j}}. \quad (4)$$

図 8 では、折り目を点視する方向から見て、折り線位置を  $\mathbf{x}$  として両端を固定したときの関数  $\rho(\mathbf{x})$  および  $f_{p,q}(\mathbf{x})$  の形状を比較している。

### 頂点隣接面

頂点が 4 を超える面から構成される場合、頂点における局所的な干渉を防ぐには稜線隣接の面をチェックするだけでは十分ではない。図 9 左のような面の干渉は、いずれも頂点を共

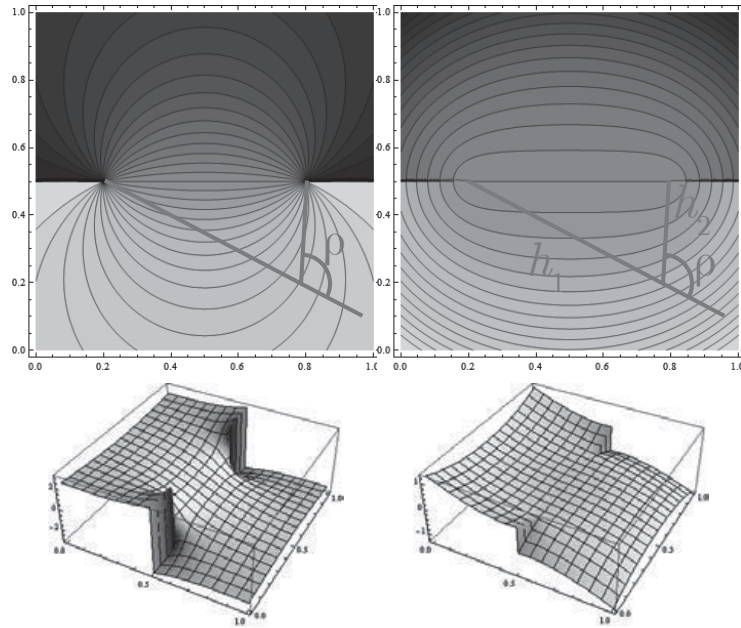


図 8: 左: 折り角  $\rho(\mathbf{x})$  は端部に特異点が現れる。右: 修正された角度評価関数  $f_{p,q}(\mathbf{x})$ 。

有するが稜線を共有しない面同士の間で発生している。閉じた単頂点の干渉問題は、本質的には二次元の閉じたチェーンの干渉問題と同等である。たとえば二次元のチェーンの展開アルゴリズムを用いて単頂点の展開問題が解かれている [9]。二次元のチェーンの展開アルゴリズムとして、バリア関数を用いて自己交差を解くものが知られている [10]。提案手法の考え方は、エネルギードリブンな手法という意味では、上記の展開アルゴリズムに近い。一方で、唯一解ではなく可能な限りの解空間を探索可能とするためには、あるいはちょうど面と面が接する状態を許すことで折紙らしい特殊な表現を可能とするためには、バリア関数を用いる事はできない。そこで、干渉していない状態においては 0 であって、折り線が面に陥入するに応じて値が上昇する適切なペナルティ関数を構成する方法について述べる。このペナルティ関数を用いれば、面の交差が存在しない状態において幾何的制限が加わらないので、インタラクティブなシステムでユーザが可能な限りの解空間を探索するのに向く。一方で、この手法は必要条件にとどまり、また内部頂点にのみ適用可能であることに留意が必要である。必要条件にとどまるのは、既に絡み合った状態を初期状態とすると、それをほどくための自明な道筋が設定できないからであるが、このような場合はユーザがデザインシステム上で目視で調整することで解決可能である。

まず、頂点  $v$  を共有する面の干渉は、『不正な折り線』を検出する事で得られる。最初に、頂点を中心とする単位球と頂点に隣接する面とを、互いに切り取る。切り取られた頂点は、扇状の立体形状となる。ここで、球面上の切り取られた領域のうち  $2\pi$  より小さい側を『内部』と呼ぶ。一般性を失うことなく、面の表側が内部方向を向いていると仮定する。頂点は可展であるから、内部領域を含む半球がかならず存在する。そのため、折りの過程において内部領域が外部に変化することはない。

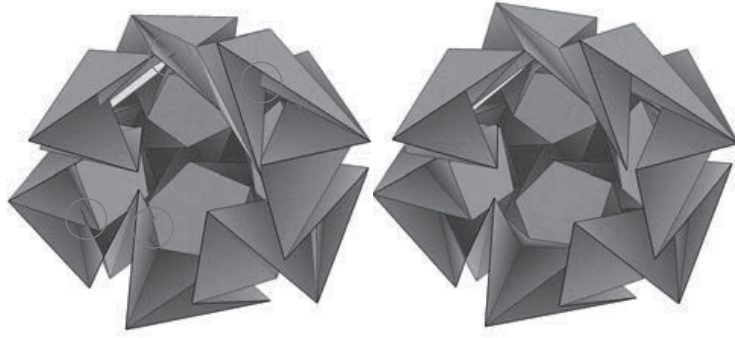


図 9: 左：頂点隣接面同士の干渉。右：ペナルティ関数による自動干渉回避の結果。

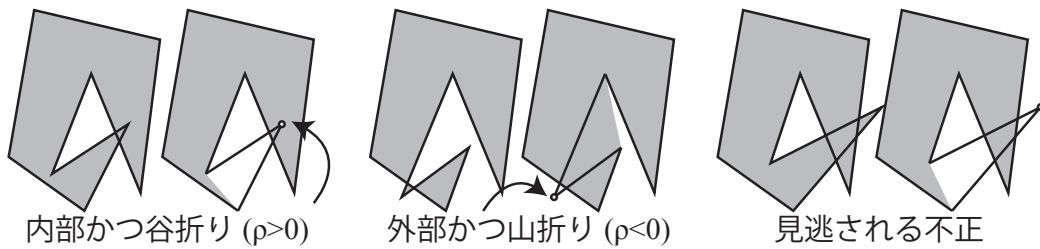


図 10: 不正な折り線 (二次元図では頂点) の検出

切り取られた頂点から、各折り線ごとに新しい扇状の立体を派生させる。元の立体から折り線に隣接する二枚の扇形面を取り除き、取り除いた隙間を新しい扇形でふさぐ。ここで作られた派生扇状立体が球を切り取る領域は、かならず元の半球領域に収まる。この折り線は下記の二種類のいずれかを満たすとき不正であると判断される。(1) 折り角が正  $\rho > 0$  であり (谷折り)、派生の扇状立体の内部に存在するとき。(2) 折り角が負  $\rho < 0$  であり (山折り)、派生の扇形立体の外部に存在するとき (図 10)。

ここで、直線が扇形立体の内部にあるかどうかを検出するには、その直線から見た扇形の符号付きの視角を一周合計した値  $\sum_i^{n_v-1} \alpha_{o,i,i+1}$  が  $2\pi$  となれば内部であり、0 となれば外部であることを用いる。ベクトル  $\mathbf{v}_o$  を向いた稜線から見た、 $\mathbf{v}_i$  と  $\mathbf{v}_{i+1}$  をつなぐ面の視角は、ベクトルが単位ベクトルであるとして次のように表される (図 11)。

$$\alpha_{o,i,i+1} = \arctan \frac{\|(\mathbf{v}_o \times \mathbf{v}_i) \times (\mathbf{v}_o \times \mathbf{v}_{i+1})\|}{(\mathbf{v}_o \times \mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{v}_o \times \mathbf{v}_{i+1})} \quad (5)$$

この稜線ごとの検出方法は、交差が起きていない状態から連続的にたどれる状態においては成功するが、二組の面が同時に交差しているような不正状態は見逃してしまう (図 10 右)。

交差状態を検出した場合、不正な折り線ごとに交差面に引き戻す事で修正を加えるようなペナルティを与える。すなわち、折り線が面に接している状態で 0 となり、面に陥入した距離に応じて増加するペナルティ関数を設定する。まず、ベクトル  $\mathbf{v}_o$  とベクトル  $\mathbf{v}_i$  お

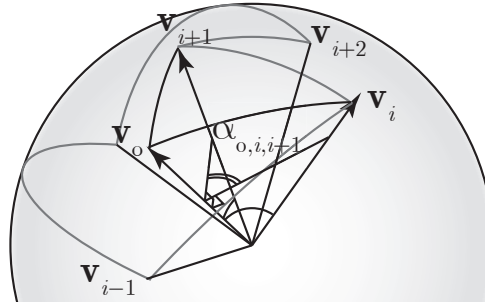
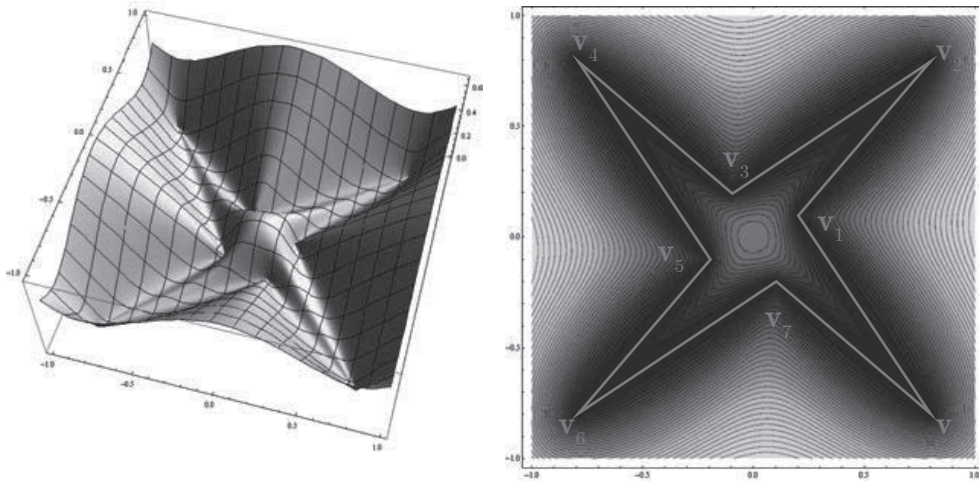
図 11: 視角  $\alpha_{0,i,i+1}$  とベクトルの表記

図 12: 星状の扇状立体によって得られるペナルティ関数。球面から平面へは心射方位図法で投影している。

よび  $\mathbf{v}_{i+1}$  で張られる面との角度距離は

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{o},i,i+1} &= (1 + \cos \alpha_{0,i,i+1}) \|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_{i+1}\| \\ &= \cos \angle(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) - \cos(\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i) + \angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{i+1})) \end{aligned} \quad (6)$$

面を組み合わせた派生扇状立体においては、すべての面に対する距離関数の調和平均を用いて

$$f_{\mathbf{o}}(\mathbf{X}) = \frac{n_v - 1}{\sum_i^{n_v-1} \frac{1}{d_{\mathbf{o},i,i+1}}} \quad (7)$$

とする。境界部において、0 となり、内部 (あるいは外部) で増加するペナルティ関数が作られる。なお、谷折りの場合は内部のみが使われ、領域外部の値は常に 0 となる (山折りはその逆)。図 12 に、このようにして得られるペナルティ関数の形を二次元に投影して表す。

### 3.3 数値計算

関数  $g, b, f$  で表される, 非線形の等式およびペナルティ関数の値を 0 とするように繰り返し計算を行う。これらの等式をまとめて  $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  としてベクトル形式で表す。拘束のヤコビ行列  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$  の Moore-Penrose 一般逆行列  $\mathbf{C}(\mathbf{X})^+$  を用いて, 毎ステップ  $i$  における形状  $\mathbf{X}_i$  における探索方向として  $-\mathbf{C}(\mathbf{X}_i)^+ \mathbf{g}(\mathbf{X}_i)$  を用いた一般化 Newton-Raphson で  $\mathbf{X}_{i+1}$  を得て, 反復計算によって解く。 $g, b, f$  は, 二稜線の角度  $\theta$  および二面の外角  $\rho$  の関数であるから,

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\theta, \rho)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{g}(\theta, \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{X}}. \quad (8)$$

と表現できる。毎ステップで, 共役勾配法を用いる事で必要な探索方向を得る。

### 3.4 曲面近似

基本的には, 幾何拘束が変数より少ないシステムとなるため, 解は唯一解ではなく多次元の解領域として与えられる。この解領域内でインタラクティブな形状探索をすることで, より望ましいパターンに修正することができる。この探索は, Freeform Origami の手法 [6] と同様に, タッチパネルなどのインタラクティブなユーザ入力から得られる初期変形モード  $\Delta \mathbf{X}_0$  を用いて,

$$\Delta \mathbf{X} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{X})^+ \mathbf{C}(\mathbf{X})] \Delta \mathbf{X}_0 \quad (9)$$

と計算する。ここで  $\Delta \mathbf{X}$  は, 解の接空間上に初期変形モードを投影して調整した変形モードである。

同じ枠組みで最初に与えた多面体形状に近い形状を得るためには, 形状の近さを表す距離関数を作成しその勾配方向を初期変形モードとして繰り返し変形を行えばよい。距離関数としては, たとえば最初に与えた多面体頂点と対応する頂点の間に重み付きの距離を作成し, それらの二乗和として与えることができる。オリジナルの多面体頂点に対応する各頂点座標  $\mathbf{x}$  について, 目標座標  $\mathbf{x}^{targ}$  を与え, 距離関数を,

$$d = \sum_v \left( (1-w)\mathbf{n} + w(\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_v^{targ}) / \|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_v^{targ}\| \right)^T (\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_v^{targ}), \quad (10)$$

とする。ここで,  $\mathbf{n}$  は, 与えた多面体メッシュの頂点における法線方向であり,  $0 \leq w \leq 1$  は法線方向に直交する方向の距離の重みである。

## 4 解の自由度と存在条件

本手法は, Freeform Origami システムに統合する形で実装した。多面体メッシュを入力として, そこからパラメトリックに折紙テセレーションを生成し, GUI を通して形状を編集し, その変形挙動をシミュレーションするといった作業が, 途切れのない操作で実現できるシステムとなった。図 13 は複曲率を持つメッシュから生成した折紙テセレーションであり, 基本の星ヒダ構造を用いているが, ドーム型と鞍型のどちらも実現でき, 本手法の自由度がわかる。

本手法の問題点として, 解の収束が初期多面体メッシュ形状に依存してしまい, 解の存

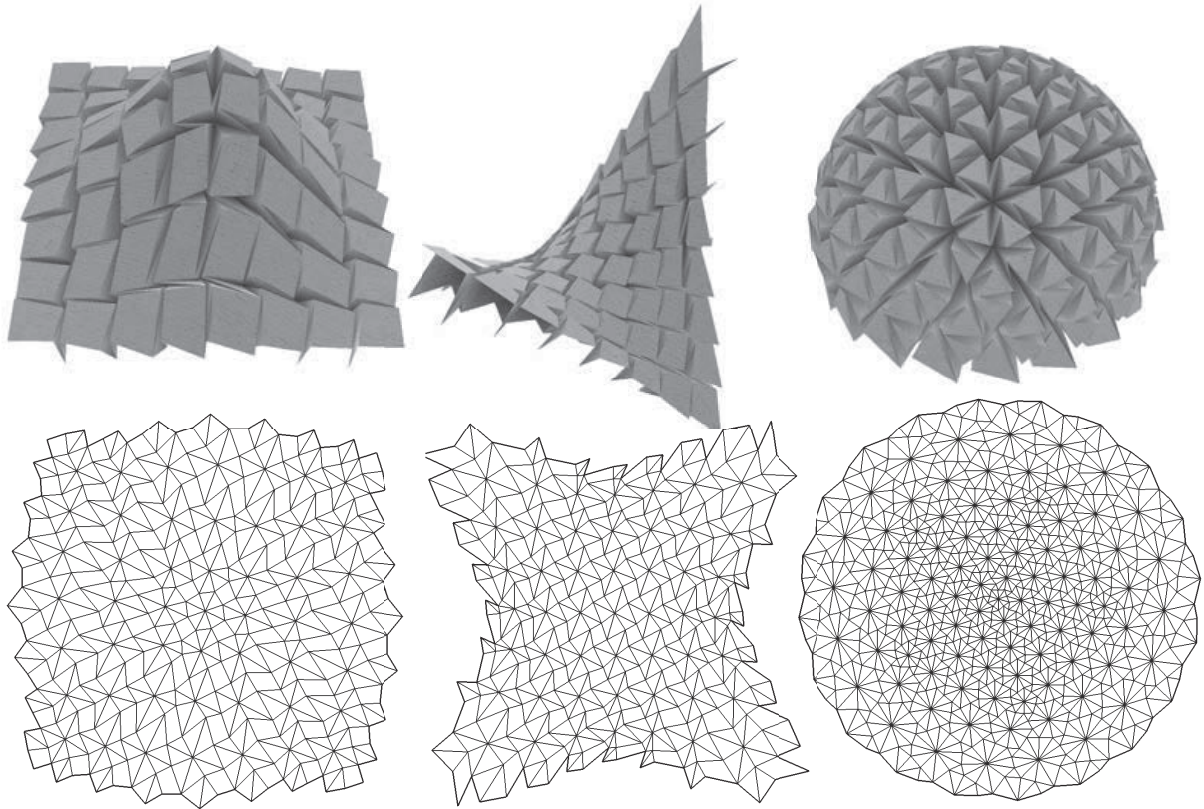


図 13: ベル状の曲面，鞍型曲面，半球面の三角形・四角形メッシュに星ヒダを挿入して生成されるテセレーション

在を理論的に保証できない点に注意が必要である。図 14(上) は上手く折紙化できない例であり、ヒダ形状が境界部分に近づくにつれて大きくなりすぎて、ヒダ部分の干渉が避けられなくなっている。この問題点は実は、本手法特有ではなく折紙に本質的に存在する普遍的な問題である。すなわち、折紙で非可展面を実現するという事は、折りヒダによって曲面状の距離を実質的に縮めることであるから、全体的な傾向として内部のガウス曲率の面積積分値が大きくなればなるほど、外周部においては表面に占めるヒダの割合が大きくなってしまふことは避けられないといえる。このようなヒダの大きさの積算を防ぐ方法としては、元の曲面に切り込みを加えることで紙の境界部分として配置する方法が有効である (図 14 下)。

## 5 ファブリケーション可能性

ルーターやレーザーカッターといった二軸 CNC 加工機を用いると、得られた展開図に沿って様々なシート材に溝加工やマシン目状の穴を加えることができる。この加工をたとえば金属シートに施せば、手作業の折りと組み合わせて、様々な形状へと成形できる。ただし、金属シートのように硬い材料を用いる場合には、特に折り作業を容易にするために加工パターンの工夫が必要となる。

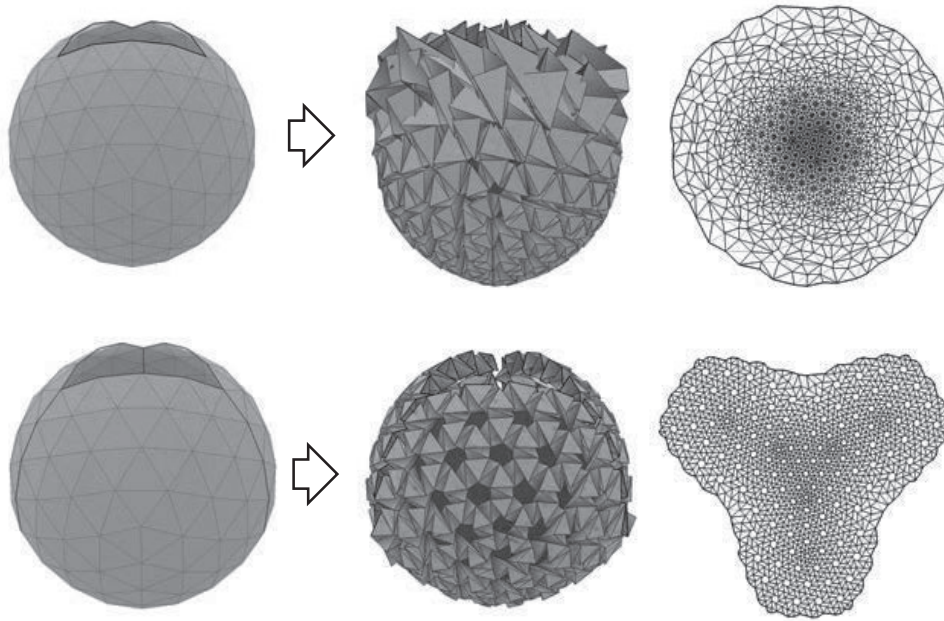


図 14: 球面 (ジオデシック・ドーム型メッシュ) の 19/20 の領域をねじり折りで折紙化したもの。上: ヒダのサイズが外周部で大きくなりすぎて干渉が回避できない。下: あらかじめ多面体メッシュに切り込みを加えて, 折紙化したもの。最終的な展開図における折り線の密度も均質化される。

**折り角制限** 硬い材料や厚みのある材料では, 稜線で隣接する面どうしが  $180^\circ$  の折りを含むと材料の破断が発生する。また,  $180^\circ$  の折りがあると, その部分で機構がロックされて自由度を失い, 変形プロセスが得られなくなる。そこで, 折り角度を制限する。このような条件は,  $\rho_{limit} = 180^\circ - \delta_{fold}$  として適切に設定することで, 稜線隣接面の干渉回避と同様に (3) 式を用いて評価できる。

**頂点角制限** 展開図において隣接する折り線の間隔が狭すぎると, 溝加工や穴が結合してしまい本来の折りが得られない。また, 折り線に与えられるモーメントが少なくなるため手作業で折りを施すときに支障が出る。隣接する折り線が共有する頂点における角度  $\theta$  に対して  $\theta \geq \delta_{corner}$  のような制限を加えることで, このような加工上問題が生じるパターンをあらかじめ回避できる。

**剛体折り可能性** 本手法で得られる解は, 平坦状態と立体状態の等長写像を保証するが, その二つの状態間の連続的な推移については扱っていない。実際, 一枚のシート材料から最終形状が折れることを目的としているから, 得られたパターンが剛体折り可能であれば, 金属材料のように面のねじれや折り線の移動をほぼ許さない材料においても連続的に無理なく成形できることとなる。そこで, *Rigid Origami Simulator* [11] を用いて得られた形状を広げて一枚の紙に連続的に戻す事を試行した。ここでは, 十分な変形自由度を得るために,

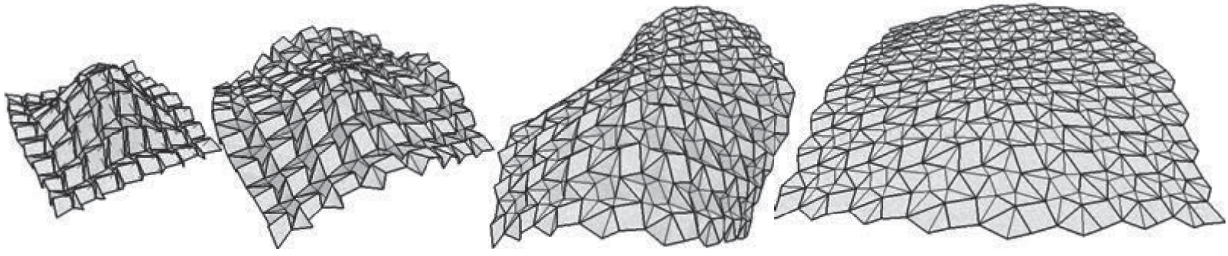


図 15: 剛体折りによる連続的展開の動作

多角形面を三角形化した上で展開のシミュレーションをする。いくつかのパターンは局所的あるいは大局的な面の衝突が起きることなく変形できた (図 15) が、大局的な面の交差が発生する物もあった。Origamizer のように完全に互いをロックした構造を作らず面同士が接することがなければ、少なくとも微少には剛体折り可能である。これは、すべての面が三角形化されたディスク同相のメッシュは、境界上の稜線の数  $E_0$  としたときに、 $E_0 - 3$  以上の自由度を持つ機構となるからである。この事実はファブリケーションの実践上有利に働くが、理論上配置空間上の領域が大局的に平面状態と接続するか、という剛体折り可能性問題は未解決問題である。

## 6 デザイン例

最後に、一連のデザインとファブリケーションのプロセスを作例を通して紹介する。まず、半球状の三角形メッシュのトポロジーを保ったまま自由に変形させた非可展な曲面が初期メッシュである (図 16 左上)。ヒダを外側に生成してヒダの凹凸が折紙らしい陰影表現を生むように、内側を表とみなす。この多面体メッシュに切頂星ヒダを挿入して、数値計算によって可展条件、輪郭の重なり回避、面の交差回避の条件を解く (図 16 中)。このままのパターンには非常に細かい三角形を含んでおり、製作するときの支障となるので、頂点角が  $30^\circ$  以上となるように拘束する。また、折り角の制限として二面角が最低でも  $15^\circ$  となるように条件を設定し、材料の破壊を回避する折りを加えた。さらに、製作した形状が水平面上に接地するように、境界部分の頂点座標に対して水平面上に制約するような拘束を加えた (図 16 右)。

次に、このように得られたパターンに沿って、ミシン目状の穴パターンを生成する (図 17)。ミシン目の間隔と幅は、繰り返し折り曲げによって破断しないように、試作を通して材料に応じた値を探索した。このミシン目状パターンに沿って 0.5mm 厚ステンレスシートにレーザー加工を施し、実際に手作業で折って設計通りの形状を得た (図 18)。折り始めて最終的な立体形状に至るまでの時間は 1 時間程度であった<sup>1</sup>。単純比較はできないが、Origamzier で得られた展開図を折るのに数時間かかるのに比べると短時間での製作といえる。角度条件や接地の条件などファブリケーションを加味した条件がデザイン時にあらかじめ設定され「折りやすい」形状が実現されていたと考えられ、本手法の妥当性を示唆す

<sup>1</sup> 製作の様子は <http://youtu.be/5zsNjp9M9Q8> で公開している



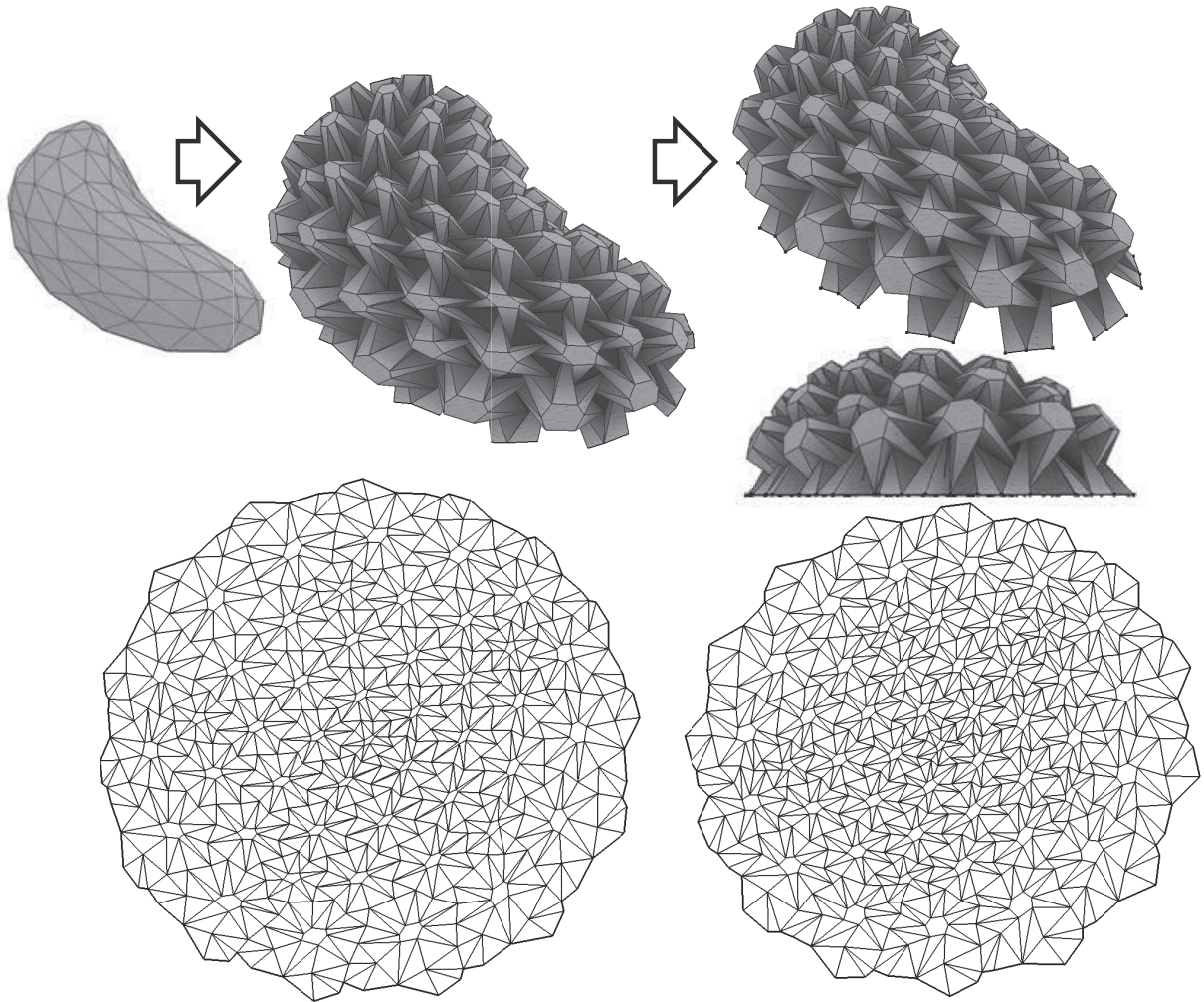


図 16: 折紙テセレーション生成プロセス。左上：初期メッシュ。中：初期メッシュに切頂星ヒダを加えて折紙化した物。右：ファブリケーションのための角度制限や接地の幾何条件を加えて調整した形状

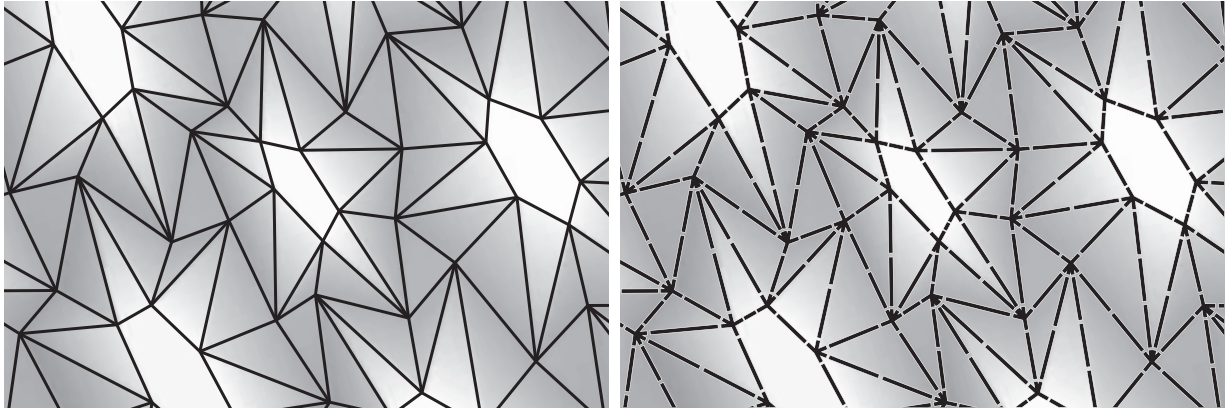


図 17: ミシン目状の穴パターンの生成。左：展開図。右：カットパターン。

る結果となった。

## 7 結論

与えられた多面体メッシュから，Resch 風の折紙テセレーションを生成し，折紙で自由曲面を構築するための手法を提案した。多面体メッシュを構成する多角形の稜線に星ヒダ構造あるいはそのバリエーションを挿入する事で初期テセレーションパターンを生成した後，数値計算によって可展条件および非交差の条件を解くことで折紙化する。頂点隣接面同士の交差を検出する方法とその交差状態を解消するために有効なペナルティ関数を提案し，Origamizer でも Freeform Origami の手法でも実現できなかった，新しい自由折紙テセレーションのデザインを導いた。また金属板のファブリケーションへの応用について，角度制限のための幾何条件と，そのデザイン例を紹介し，その妥当性を示唆した。本研究では，平面状態から三次元状態の剛体折り可能性については考慮されていないため，折りのプロセスに材料の弾性変形が含まれうる。しかし，シミュレーションの試行によって，本提案手法を用いて剛体折り可能な折りパターンを得られることを示した。

## 謝辞

本研究は科学技術振興機構さきがけプログラムの助成を受けたものである。

## 文献

- [1] Tachi, T., 2010. “Origamizing polyhedral surfaces”. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **16**(2), march, pp. 298–311.
- [2] 藤本修三, 1976. 創造性を開発する 立体折り紙, 兵庫県学校厚生会.
- [3] Miura, K., 1970. “Proposition of pseudo-cylindrical concave polyhedral shells”. In *Proceedings of IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structures*.

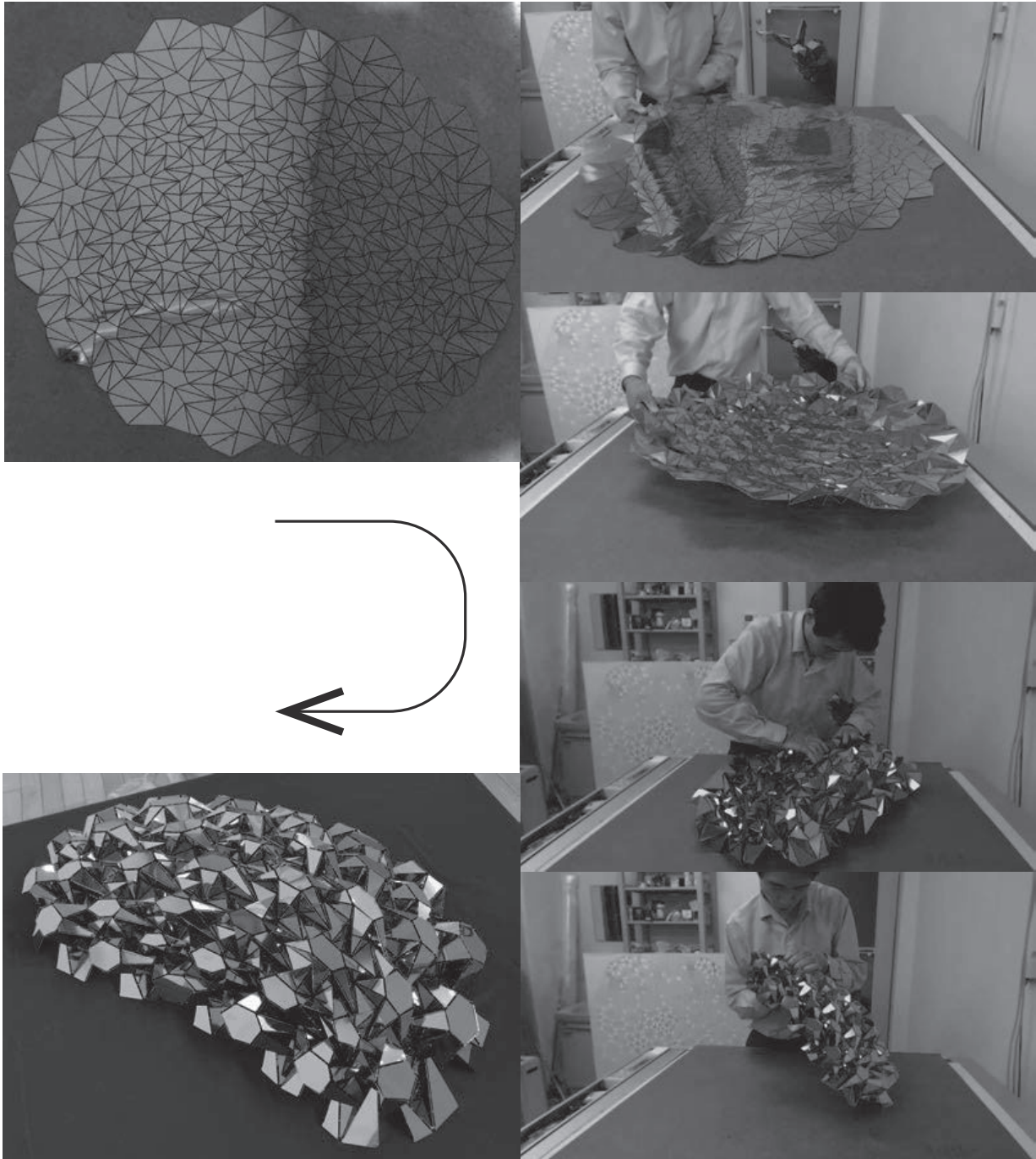


図 18: ステンレスシートの折り曲げプロセス

- [4] Davis, E., Demaine, E. D., Demaine, M. L., and Ramseyer, J., 2013. “Reconstructing david huffman’s origami tessellations”. *Journal of Mechanical Design*, **135**(11) doi:10.1115/1.4025428
- [5] Resch, R. D., 1968. Self-supporting structural unit having a series of repetitious geometrical modules. United States Patent No. 3,407,558.
- [6] Tachi, T., 2010. “Freeform variations of origami”. *Journal for Geometry and Graphics*, **14**(2), pp. 203–215.
- [7] Tachi, T., 2013. “Designing Freeform Origami Tessellations by Generalizing Resch’s Patterns”. *Journal of Mechanical Design*, **135**(11),doi:10.1115/1.4025389
- [8] Sheffer, A., and de Sturler, E., 2001. “Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening”. *Engineering with Computers*, **17**(3), pp. 326–337.
- [9] Streinu, I., and Whiteley, W., 2005. “Single-vertex origami and spherical expansive motions”. In *Lecture Notes in Computer Science 3742*, pp. 161–173.
- [10] Cantarella, J. H., Demaine, E. D., Iben, H. N., and O’Brien, J. F., 2004. “An energy-driven approach to linkage unfolding”. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 134–143.
- [11] Tachi, T., 2009. “Simulation of rigid origami”. In *Origami<sup>4</sup>: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, R. Lang, ed., A K Peters, pp. 175–187.