論文名 Title	有界な用紙の 表裏同等折り線図について	On Iso-Area Origami Crease Patterns for bounded Origami Paper
著者 Author(s)	川崎敏和	Toshikazu Kawasaki
受理年月日 Date of acceptance	2015/2/9	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2015/3/31 Vol. 4 No. 1 page 11-16	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

有界な用紙の表裏同等折り線図について

川崎敏和
阿南工業高等専門学校 一般教養
Email: kawasaki@anan-nct.ac.jp

On Iso-Area Origami Crease Patterns for bounded Origami Paper

Toshikazu Kawasaki
Anan National Institute of Technology, Anan, Tokushima, Japan

Abstract "Iso-area Origami" is proposed by the author and is introduced in "Top Origami" written by K. Kasahara. In this paper, the author gives mathematical definition of "Iso-area Origami Crease Pattern". Moreover he shows that there exist two kinds of iso-area origami crease patterns for bounded origami paper.

1. はじめに

表裏同等折り紙とは，筆者が「トップおりがみ」[笠原 85]で提唱したもので，図 1.1 の「表裏同等立方体」のように，紙の表裏を対等に使った折り紙である．図 1.2(a)は「表裏同等ねじり折り」で，その展開図(b)を 90 度回転させた(c)は(b)と山谷が逆になっている．前川は[前川 02]で表裏同等折り紙の作例を示し，用紙に垂直な軸での回反対称であることを前提にした表裏同等折り紙の定義を与えるとともに，ミウラ折りなど既存の折り紙の表裏同等性を論じた．さらに[前川 08, 14]で，用紙上の直線を回転軸とする 180 度回転対称な表裏同等折り紙があることを指摘した（図 1.3）．しかし，二種類の表裏同等折り紙の統一には至らなかった．本稿では，平面の等長写像 f に対して f 反転という概念を導入して，回反対称や回転対称を前提としない表裏同等折り紙の定義を与える．そして，回反対称な表裏同等は回転反転表裏同等，回転対称な表裏同等は鏡映反転表裏同等であり，表裏同等折り紙はこの二種類しかないことを示す．

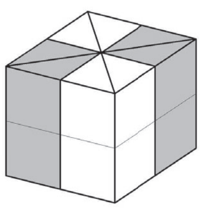


図 1.1

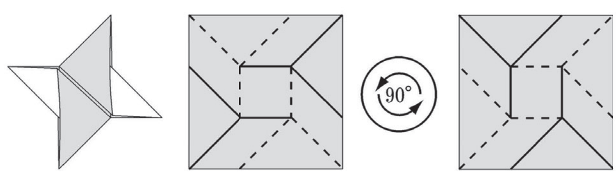


図 1.2 (a) (b) (c)

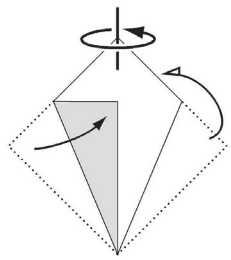


図 1.3

2. 表裏同等折り紙の定義

本稿では折り紙の用紙となる 2 次元平面 $\mathbf{R}^2$ 内の領域 D は有界で境界を含まない開領域とする．有界としたのは研究対象から平織りをはずすため，開領域としたのは折り線が境

界上で交わらないようにするためである．

定義 2.1（折り角）　折り線 l に対して，**折り角** $-\pi \leq \boldsymbol{ang(l)} \leq \pi$ を面の回転角で定義する（図 2.1）．山折り線の折り角の値は負とする．

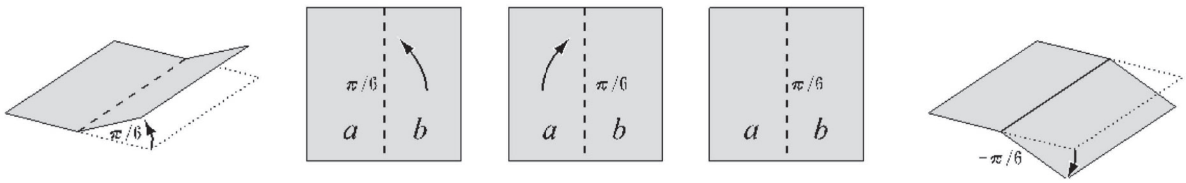


図 2.1 (a)　(b)　(c)　(d)　(e)

図 2.1(b)は左側の面を固定，(c)は右側の面を固定して折ったものであるが，同一視して(d)と表す．なお，通常の谷折りの折り角 π と山折りの折り角 $-\pi$ は省略する．

定義 2.2　有界な開領域 D 上の有限個の折り角のついた線（線分，半直線，直線）の集合を**形式的折り線図**といい C で表す．そのうち実際に折れるものを**展開図**とよぶ．また，折り角を含めて折り線 l の山谷を逆にする操作を $\boldsymbol{i}$ で表して**反転**，i による l の像 $\boldsymbol{i(l)}$ を $\boldsymbol{l}$ の**反転**という．さらに，C の**反転**を $\boldsymbol{i(C)} = \{\, i(l) \mid l \in C \,\}$ で定義する．

定義 2.3（表裏同等折り線図）　用紙 D の形式的折り線図 C は，$f(C) = i(C)$ を満たす等長写像 $f: D \to D$ が存在するとき $\boldsymbol{f}$ **反転**といい，C を（f 反転）**表裏同等折り線図**とよぶ．さらに，実際に折れるものは**表裏同等展開図**，折ったものを**表裏同等折り紙**という．

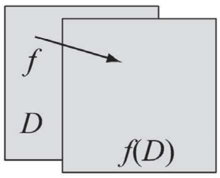
また，表裏同等折り線図 C は，$f(C) = C$を満たす等長写像 $f: D \to D$ が存在するとき $\boldsymbol{f}$ **不変**という．平面 $\mathbf{R}^2$ の等長写像（合同変換）は平行移動，回転，鏡映（線対称）とその合成であるが，図 2.2 のように平行移動 f は D から D への写像にならないので除外できる．なお，恒等変換は 1 で表す．

定義 2.4　用紙 D の形式的折り線図 C に対して，$f(C) = i(C)$ となる等長写像 $f: D \to D$ の集合を$\boldsymbol{Con(C)}$と表す．また，$f(C) = C$ となる等長写像 f の集合を$\boldsymbol{Inv(C)}$と表す．

命題 2.1　任意の$f, g \in Con(C)$ および $h, k \in Inv(C)$に対して，$f^{-1} \in Con(C), gf \in Inv(C)$, $fg \in Inv(C)$，$h^{-1} \in Inv(C)$，$hk \in Inv(C)$，$kh \in Inv(C)$が成り立つ．後半は，$Inv(C)$が群であることを意味する．

証明　$f^{-1}(C) = f^{-1}(if(C)) = if^{-1}f(C) = i1(C) = i(C)$．よって，$f^{-1} \in Con(C)$．
$gf(C) = g\big(f(C)\big) = g(iC) = ig(C) = iiC = C$．よって，$gf \in Inv(C)$．同様に，$fg \in Inv(C)$．
$h^{-1}(C) = h^{-1}(h(C)) = h^{-1}h(C) = 1(C) = C$．よって，$h^{-1} \in Inv(C)$．$hk(C) = h\big(k(C)\big) = h(C) = C$．よって，$hk \in Inv(C)$．同様に，$kh \in Inv(C)$．

例 2.1　C を図 2.3①の折り線図，f を水平軸に関する鏡映，g を鉛直軸に関する鏡映，h を π 回転とする．③で $if(C) = C$，④で $g(C) = C$，⑥で $ih(C) = C$ なので，C は鏡映 f 反転表裏同等，鏡映 g 不変，回転 h 反転表裏同等である．



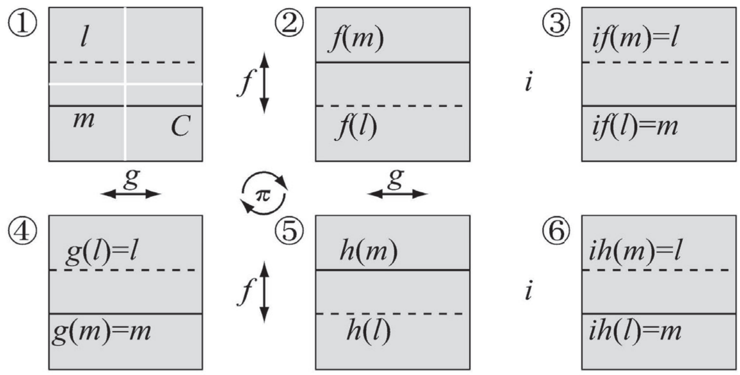


図 2.2　　　　図 2.3

例 2.2　図 2.4(a)は，$^{\pi}/_{2}$ 回転させると山谷が逆になるので，$^{\pi}/_{2}$ 回転反転表裏同等折り線図である．$\alpha = {}^{\pi}/_{2}$ で折ると(c)の表裏同等折り紙を得る．

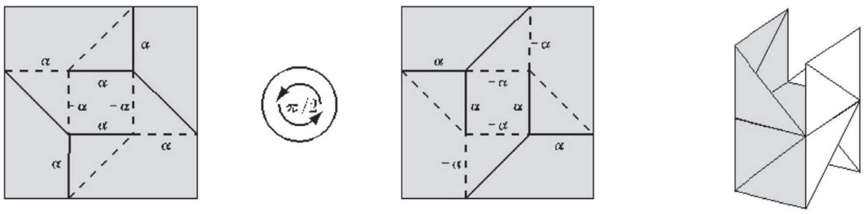
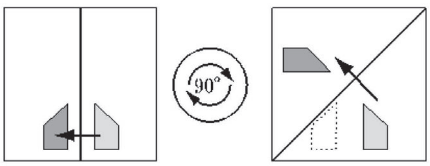


図 2.4(a)　　(b)　　(c)



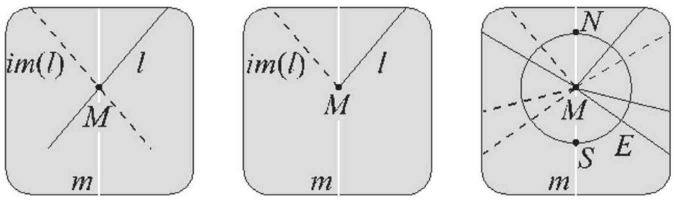


図 3.1　　図 3.2(a)　　(b)　　(c)

3. 鏡映反転表裏同等

第 2 節で述べたように，考察の必要がある等長写像は回転と鏡映とその合成であるが，回転と鏡映の合成は新たな鏡映になるので分けて考える必要はない (図 3.1)．そこでまず，鏡映反転表裏同等を調べる．直線 m を対称軸とする鏡映は同記号 m で表す.

命題 3.1　鏡映 m 反転表裏同等折り線図 C の折り線 l に対して，m に関して l と対称な位置に，l と山谷が逆の折り線 が存在する．また，対称軸 m に重なる折り線は存在しない.
証明　$im(C) = C$ だから，任意の折り線 $l \in C$ に対して，$im(l') = l$ となる折り線 $l' \in C$ が存在する．この l' が求める折り線である．対称軸 m に重なる折り線 $l \in C$ が存在すると仮定すると，l と山谷逆の折り線 l' が重なって存在することになり，矛盾が生じる．■

命題 3.2　鏡映 m 反転表裏同等展開図 C の折り線は対称軸 mとの共有点をもたない.
証明　$l \cap m \neq \emptyset$ なる折り線 $l \in C$ が存在すると仮定し, 共有点を M とおくと (図 3.2(a)), M には 4 本以上の折り線が集まる．命題 3.1 より，対称軸 m に重なる折り線は存在しない

ので，M に偶数本の折り線が集まり，対称な位置にある折り線の山谷は逆になる(c)．点 M 中心の小さい円板 E を折ることを考える．E の周と対称軸 m の交点を N,S とおく．折りやすくするために線分 MS に切り込みを入れて，折ったあとで貼り合わせる（図 3.3(a)）．左右の半円板 E_L,E_R を折ったとき扇形の弧は点 M 中心の球面上を動くので，m を軸とする π 回転対称になる(b)．切込みを入れる前 P と Q は同一点だったので，2 点は折ったとき対称軸 m と球面の共通部分にある．つまり，$P=N$ または S である．$P=N$ の場合には自己交叉し(c)，$P=S$ の場合には P,Q ともに S に重なる．これは折る前の状態に戻ることを意味する．いずれにせよ，円板 E は折れない．よって，折り線は対称軸 mとの共有点をもたない．■

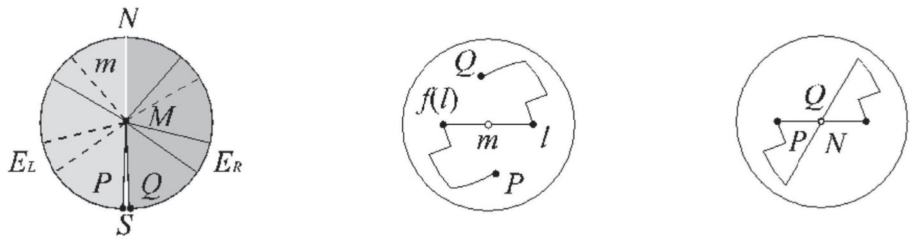


図 3.3(a) (b) (c)

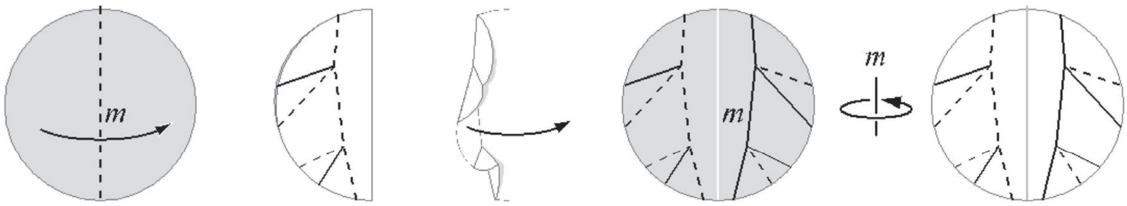


図 3.4(a) (b) (c) (d) (e)

命題 3.3 鏡映 m 反転表裏同等展開図 C は，用紙を対称軸 m で半分に折って二重にしてから，m にぶつからないよう折って作ることができる（図 3.4）．また，C は m を回転軸とする π 回転不変である．

証明　図 3.4 のように，半分に折って 2 枚重ねて折り目をつけてから広げると，m に関して対称で山谷逆の折り線がつく．当然，対象軸 m で(d)を回転しても同じ折り線になる(e)．つまり，前川の第二の表裏同等折り紙である．■

4. 回転反転表裏同等

回転反転表裏同等を調べる．用紙 D は点 O を中心とする回転対称な開領域とする．

命題 4.1 　C が回転反転表裏同等折り線図ならば，回転の位数は偶数になる．

証明　折り線 $l \in C$ に回転 r と山谷を逆にする操作 ir を作用させて折り線の列 l, $ir(l)$, $(ir)^2(l), \dots, (ir)^n(l), \dots$を作る．折り線の数は有限なので，$(ir)^n(l)=l$ なる自然数 n が存在する．この等式の両辺の山谷は同じなので n は偶数になる．■

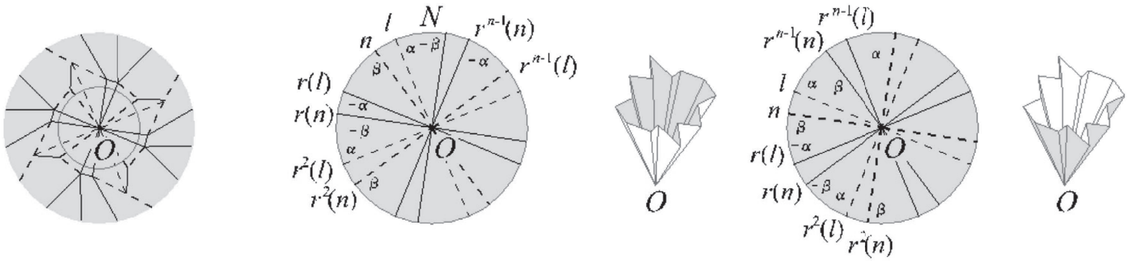


図 4.1　(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

命題 4.2　回転反転表裏同等展開図の折り線は回転の中心を通らない．

証明　中心を通る折り線が存在すると仮定する．折り線図 C を O 中心の小さい円形に切り取って折ると錐面になる（図 4.1）．これが(c)のように裏に凸であるとする．(b)を回転させた(d)の山谷は(b)の逆なので，(c)が裏に凸になると同じ理由で表に凸になる．しかし(e)は(c)を回転させたもので凹凸が変わることはない．よって中心を通る折り線は存在しない．■

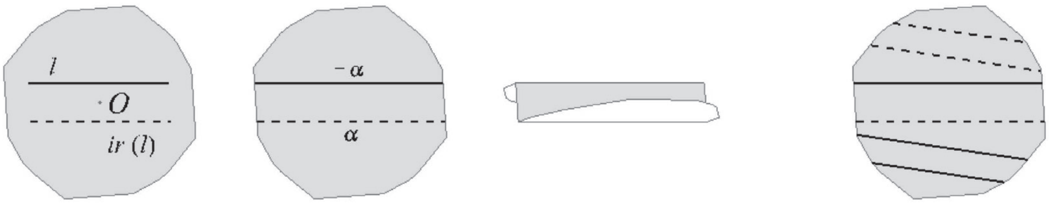


図 4.2(a)　(b)　(c)　(d)

回転 r の位数が 2 の場合を調べる．折り線は回転の中心を通らないので，山谷が逆の平行な折り線 $l, ir(l)$ が存在する（図 4.2(a)）．この折り線が用紙 D を貫く場合には，この 2 本で折り線図が完結して，最も簡単な回転反転表裏同等展開図 $C = \{l, ir(l)\}$ を得る(b)(c)．用紙 D 内で折り線同士がぶつからなければ平行な折り線を追加することができる(d)．

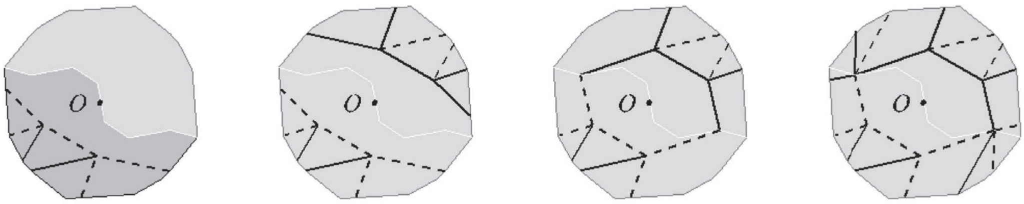


図 4.3(a)　(b)　(c)　(d)

図 4.2(a)の折り線 l, $ir(l)$ が用紙 D を貫かない場合は，回転の中心点を通り回転対称な線で D を分割して，一方を自由に折って折り線をつける（図 4.3(a)）．これを他方に山谷逆に点対称複写すると回転反転表裏同等展開図が得られる(b)．折り線が分割線と出会った場合は，この点から延びる 3 本以上の折り線を追加することになる(c)(d)．(b)の作図でわかるように，(d)は回反対称になる．これは，位数が 2 でなくても成り立つ．

5. まとめ

本稿では，折り線の山谷を逆にする反転を用いた表裏同等折り紙の定義を与えて，その

性質を導いた．そして有界な用紙 D の折り線図 C が等長写像 f 反転表裏同等であるとき，f は鏡映または回転であり，鏡映の場合には対称軸 m を回転軸とした π 回転不変，回転の場合には回反対称になることがわかった．前者は前川第二の表裏同等折り紙であるが，鏡映反転としたことで回転反転である第一のものと統一できた．

参考文献

[笠原 85] 高濱利恵監修・笠原邦彦著，トップおりがみ，サンリオ（1985）.

[前川 02] Thomas Hull 編，前川淳執筆,「表裏同等折りの定義」，折り紙の数理と科学，森北出版(2005).

[前川 08] 前川淳，折り紙&かたち散歩,『表裏同等折りの定義』再考 2008: http://origami.asablo.jp/blog/2008/11/03/3875686

[前川 14] 前川淳,「表裏同等折りの特徴」, 第 16 回折り紙の科学教育研究集会，2014.6.22.