論文名 Title	二等辺三角分割に基づくつる巻き折りと正奇角柱容器とその表裏同等性	Helix Folding based on Isosceles Triangular Division a long strip of paper, Right Prismatic Vessels having a Regular Odd Number of Edges Polygon Base
著者 Author(s)	川崎敏和	Toshikazu Kawasaki
受理年月日 Date of acceptance	2015/2/17	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2015/3/31 Vol. 4 No. 1 page 17-22	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

二等辺三角分割に基づくつる巻き折りと正奇角柱容器とその表裏同等性

川崎敏和
阿南工業高等専門学校 一般教養
Email: kawasaki@anan-nct.ac.jp

Helix Folding based on Isosceles Triangular Division a long strip of paper,
Right Prismatic Vessels having a Regular Odd Number of Edges Polygon Base
and their Iso-area property

Toshikazu Kawasaki
Anan College of Technology, Anan, Tokushima, Japan

要約 "Helix folding" well known as "DNA" created by Thoki Yen is folded from a long strip of paper. The long strip is divided into exactly equal rectangles by valley creases. We mountain fold –unfold along the parallel diagonals of the equal rectangular division. Each rectangle is divided into the two right angled triangles that share the hypotenuse. The helix folding gives a regular even-polygon if the rectangles have a proper proportion.

First, the author mentions helix folding on based on isosceles triangular division and odd-polygons. Next, he shows a way to fold right prismatic vessels with a regular odd-polygon base. Lastly, we know that they have iso-area crease patterns.

1. はじめに

一定幅の細長い帯を等間隔に山折りしてから各長方形を平行な対角線で谷折りすることは**つる巻き折り**とよばれる（図 1.1(a)(b)）．Thoki Yen の「DNA」（図 1.1(c)）や布施知子の作品[布施 95, 14]などに見られるが，Ravindra Keskar は折り畳んだ円板状のものを**菊座**（Rosette）とよび，数学教材とした[Keskar 02]．図 1.1(a)の直角三角形の縦横比を特定の値にとると期菊座の角が揃って正多角形になる．本稿ではまず，正偶角形の菊座と正偶角柱折り紙容器を紹介する．次に二等辺三角形分割に基づくつる巻き折りを導入して，正奇角形の菊座ができることを示す．そして最後に，側面のついた正奇角柱容器[川崎 15-1]の表裏同等性を論ずる．なお，山折り線は太線で表す．

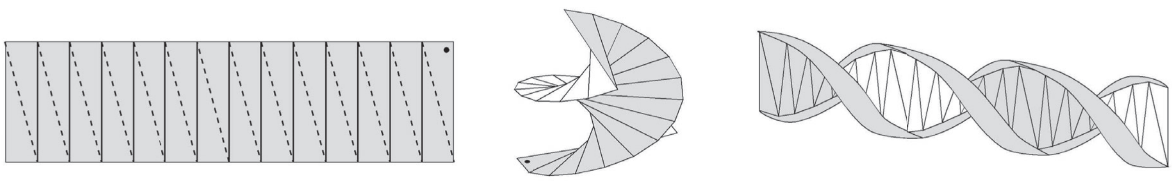


図 1.1(a)　　(b)　　(c)

2. つる巻き折り

図 2.1 はつる巻き折りの展開図とその菊座である．偶数 n に対して，折り線の間隔を 1，帯の幅を $\cot\frac{\pi}{n}$ にとると，一辺の長さが 1 の正 n 角形菊座になる（図 2.2）．

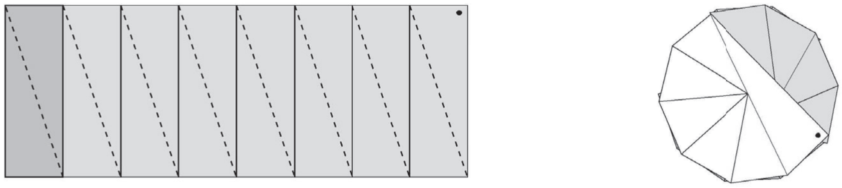


図 2.1(a)　　(b)

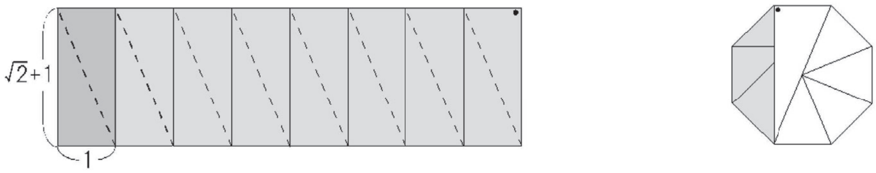


図 2.2(a)　　(b)

正偶角菊座に側面をつけて容器にすることができる．図 2.3 は正方形で折る 2 枚組ユニット折り紙の作り方を表している．展開図(a)を折ったもの 2 つを(b)のように組んで，(c)のように側面を包むと(d)の正 8 角容器（皿）になる[川崎 14].

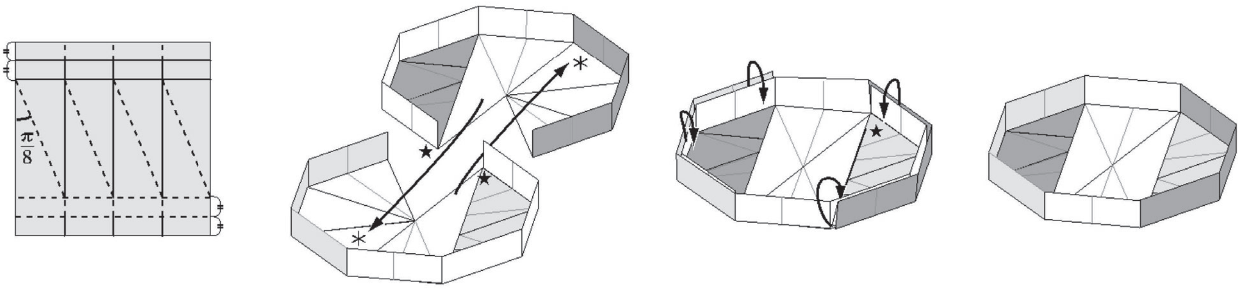


図 2.3(a)　　(b)　　(c)　　(d)

3. 二等辺三角形分割に基づくつる巻き折りによる正奇角菊座

正偶角菊座は，斜辺の中点を共有する直角三角形から成る（図 3.1）．斜辺の両端は菊座の中心に関して点対称に位置して正偶角形の頂点になる．図 3.2 は二等辺三角形分割から作る正奇角形の構造を表したもので，偶角形の直角三角形が二等辺三角形にとって代わっていることがわかる．

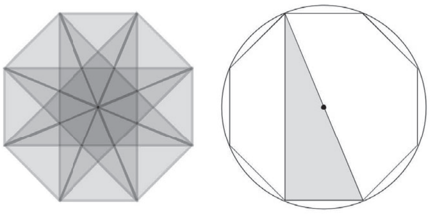


図 3.1

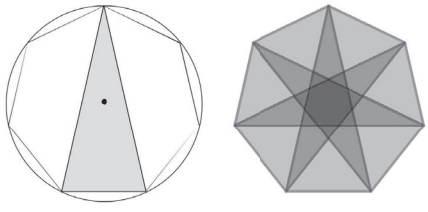


図 3.2

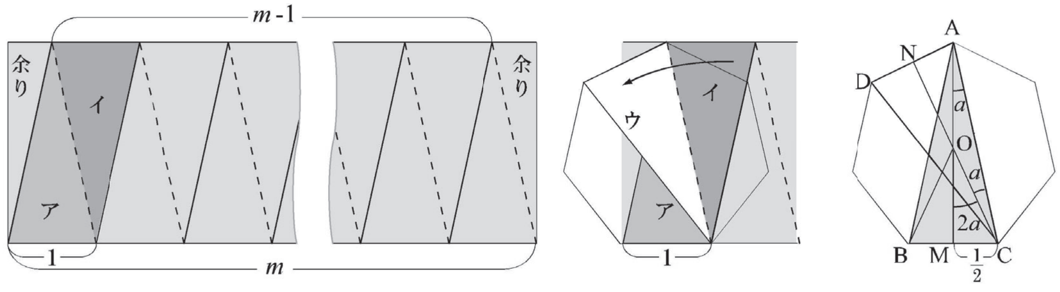


図 3.3(a)　(b)　(c)

定義 3.1　細長い長方形の帯を合同な二等辺三角形に分割して，その境界線を山谷交互に折ることを**二等辺三角分割に基づくつる巻き折り**（簡単に，**新つる巻き折り**），折り畳んだものを**菊座**，二等辺三角形を**単位**とよぶ．

命題 3.1　n が奇数であるとき，底辺の長さが 1，高さが $\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2n}$ の二等辺三角形分割に基づくつる巻き折りでできる菊座は正 n 角形になる（図 3.3）．ただし，(a)で $m=\frac{n+1}{2}$．

証明　図 3.3(a)を二等辺三角形ア，イの境界線で折ると，イはウに移る(b)．アの中心線 AM とウの中心線 CN の交点を O とおくと，頂角の半分として $\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OCA}$．この角度を a と表すと，$\angle\mathrm{MOC}=2a, \angle\mathrm{BOC}=4a$ となる．一方，$\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2n}=$ 高さ $=\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\cot a$ なので，$a=\frac{\pi}{2n}$ である．したがって，$\angle\mathrm{BOC}$ は正 n 角形の中心角である $\frac{2\pi}{n}$ になる．菊座の辺となる二等辺三角形の底辺は，帯の下縁から m 本，上縁から $m-1$ 本，合計 $2m-1=n$ 本あって正 n 角形をなす．■

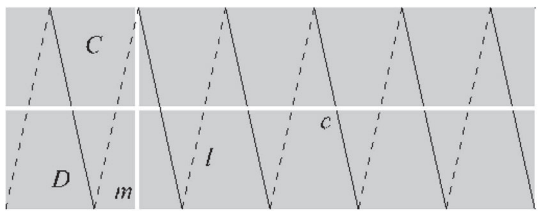


図 4.1

4. 新つる巻き折りの表裏同等性

本節では，D を無限に長い一定幅の帯，C を新つる巻き折りの展開図（図 4.1）とする．直線 m に関する鏡映を同じ記号 m（mirror），帯の中心線を c（center line）で表す．帯の等長写像 f は図 4.2(a)の平行移動 p，帯の中心線 c 上の点を中心とする π 回転 r，鏡映 m，帯の中心線に関する鏡映 c，c と p の合成である並進鏡映 g だけである．合成の組み合わせは他にもあるが，c と m の合成 mc が回転になるように，(a)～(f)のいずれかになることが知られている．そこで，等長写像 f 毎に f 反転表裏同等であるかどうか，すなわち，$f(C)=i(C)$ が成り立つかどうか調べていく．i は反転（折り線の山谷を逆にする操作）で

ある．

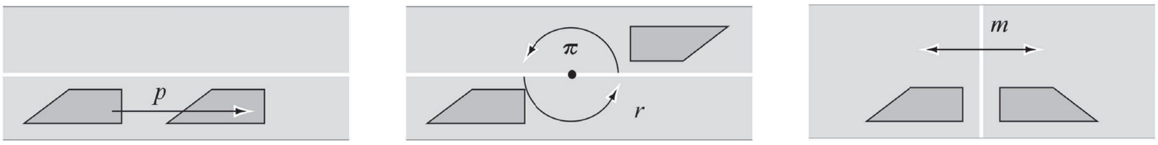
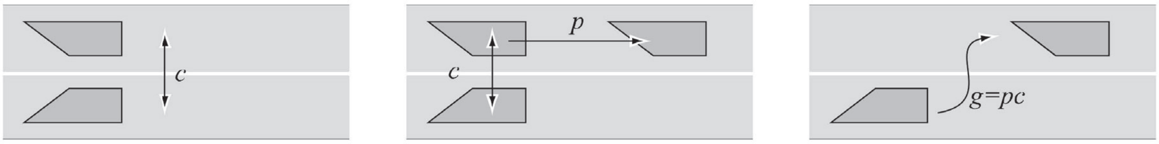


図 4.2(a)　　　(b)　　　(c)



(d)　　　(e)　　　(f)

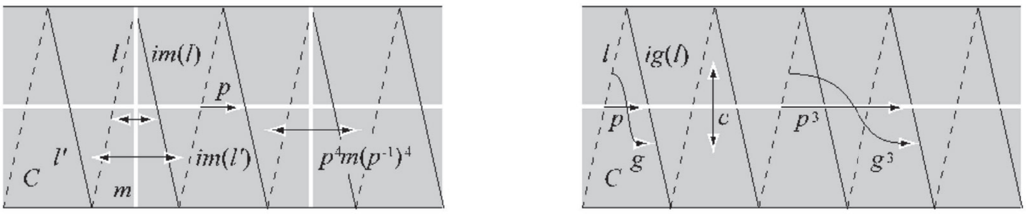


図 4.3(a)　　　(b)

平行移動：図 4.1 の新つる巻き折りの谷折り線 l は平行移動しても傾きが変わらないので，負の傾きをもつ山折り線に重なることはない．したがって，平行移動反転表裏同等ではない． π 回転：π 回転でも折り線の傾きは変わらないので，平行移動の場合同様に，回転反転表裏同等ではない．鏡映：図 4.3(a)の直線 m に関する鏡映変換で $m(C) = i(C)$ となるので， C は鏡映 m 反転表裏同等である．中心線鏡映 c： 図 4.2(d)の鏡映 c は折り線を一切重ねないので論外である．しかし，鏡映 c と平行移動 p の合成である並進鏡映 $g = pc$（glide reflection）に対して $g(C) = i(C)$ が成り立つので，C は並進鏡映 g 反転表裏同等である．直線 m を平行移動した$p(m)$に関する鏡映は pmp^{-1} と表され，並進鏡映 p^3c はg^3 とも表されるので，

命題 4. 1　新つる巻き折り展開図 C は，図 4.3 の鏡映 m と並進鏡映 g で反転表裏同等で，$Con(C) = \{ f: D \to D \mid f(C) = i(C) \}$ は，鏡映と並進鏡映からなる集合

$$\{\ldots, p^{-1}mp, m, pmp^{-1}, p^2m(p^{-1})^2, \ldots, (g^{-1})^3, g^{-1}, g, g^3, g^5, \ldots\}$$

と一致する．

図 4.4(a)は新つる巻き折り正 7 角柱容器と展開図(b)$\left(\alpha = \frac{2\pi}{7}, \beta = \frac{\pi}{2}\right)$である[川崎 15-1].

なお， α, β は[川崎 15-1]で定義した折り角である．(a)は長方形で折っているが，折り線は無限に長い帯に拡張できる(c)．(c)は図 4.1 を部分にもつので，その対称性は新つる巻き折りの対称性（鏡映 m や並進鏡映 g で反転表裏同等）を超えることはない．したがって，命題 4.1 の 2 種類の対称性を容器側面が持つか検証することで(c)の表裏同等性がわかる．

並進鏡映 g に対して $g(C) = i(C)$ は成り立っている．しかし，折り線 l とその鏡映 $m(l)$ は

ともに山折り線なので，$m(C) \neq i(C)$ である．つまり，

命題 4. 2　新つる巻き折り正 7 角柱容器の展開図（図 4.4(b)）を無限に長い帯に拡張した(c)は並進鏡映反転表裏同等折り線図である．

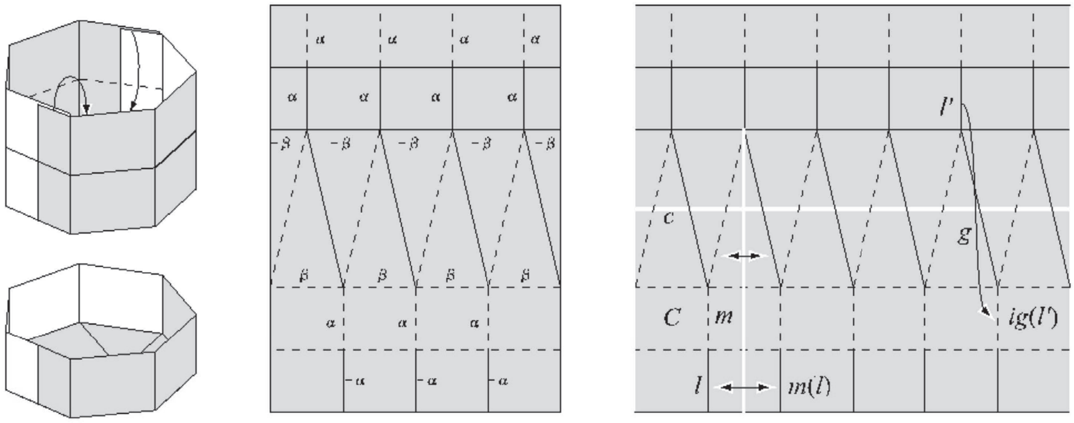


図 4.4(a)　　　　(b)　　　　(c)

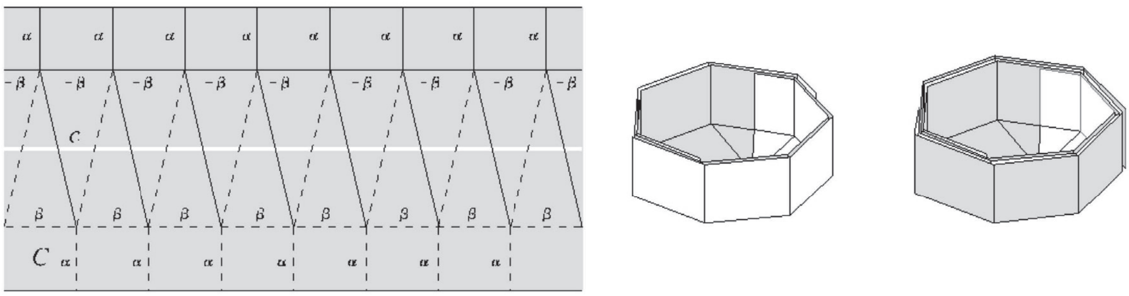


図 4.5(a)　　　　(b)　　　　(c)

引き続き命題 4.2 の容器の表裏同等性を調べるが，折りの最終工程（図 4.4(a)上）の側面の半分折りは無限長の帯では定式化しにくい．そこで，折り返し部分を除いた図 4.5(a)を考える．(b)はこれを折ったもので側面の紙の重なりがよくわかる．(c)は(a)の 1.5 倍長の帯を折ったもので，これらの極限として無限に長い帯で折った並進鏡映反転表裏同等容器を得る．命題 4.2 は 7 角形で記述したが，7 という値は折り角 $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ でしか使われていないので，$\alpha = \frac{2\pi}{n}$ とすれば，3 以上の奇数 n で命題は成り立つ．[川崎 15-2]で表裏同等折り線図を折ったものとして表裏同等折り紙を定義したので，

定理　新つる巻き折り正奇角柱容器の展開図は無限に長い帯に拡張できて，側面の包み込み部分を除くと並進鏡映反転表裏同等折り紙になる．

参考文献

[Yenn90]　Thoki Yenn, “DNA.” In Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, edited by H. Huzita, pp. 143-158. Padova, Italy: Dipartmento di Fisica dell'Universita di Padova, 1990.

[Keskar02] Ravindra Keskar , Square Pegs in Round Holes, Vigyan Prasar, New Delhi, ISBN:81-7480-048-4, 2002.

[布施 12] Viereck Verlag, 布施知子，SPIRAL, 2012，ISBN 978-3-941327-07-8.

[川崎 14] 川崎敏和,「トリコローレ」, 折紙探偵団 25 巻第 2 号, 通巻 146 号.

[川崎 15-1] 川崎敏和,「正 5 角，正 7 角箱」, 折紙探偵団 25 巻第 5 号, 通巻 149 号.

[川崎 15-2] 川崎敏和，有界な凸用紙の表裏同等折り線について，折り紙の科学，Vol.4, No.1(2015), (to appear).