| | | |
|---|---|---|
| 論文名<br>Title | 折り紙とコンパスによる鶴心の作図 | Geometric Construction of<br>the Crane-center by Origami with Compass |
| 著者<br>Author(s) | 西村保三 | Yasuzo Nishimura |
| 受理年月日<br>Date of acceptance | 2014/9/10 | |
| 掲載<br>First publish | 『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2015/3/31<br>Vol. 4 No. 1 page 4-10 | |
| 備考<br>Note | | |

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

# 折り紙とコンパスによる鶴心の作図

西村　保三
福井大学教育地域科学部
910-8507，福井市文京 3-9-1
y-nishi@u-fukui.ac.jp

Geometric Construction of the Crane-center by Origami with Compass

Yasuzo NISHIMURA
Faculty of Education and Regional Studies, University of Fukui
3-9-1 Bunkyo, Fukui 910-8507, JAPAN

**要約.**　折り鶴は，内接円を持つ四辺形から折ることができる。このとき，首翼互換性のある鶴の中心は，鶴心と呼ばれる。本論文では，与えられた四辺形の鶴心を，折り紙とコンパスによって作図する方法を考察する。
Abstract: Orizuru can be folded from a quadrilateral which has the inscribed circle. Then the center of crane which has convertibility of wings and the head is called the crane-center. In this paper we consider a construction of the crane-center for given quadrilateral by origami with compass.
Keyword: origami construction, orizuru, crane-center

## １．はじめに

折り鶴は，通常正方形の紙から折られるが，菱形の用紙からでも折ることができる。1970 年代後半に，伏見康治 [1] は凧形の用紙で折り鶴を折る方法を考えた。その後，折り鶴の変形は，前川淳 [6]，J. ジュスタン [4]，川崎敏和 [5] らによって研究されている。図 1 は,「折り鶴の基本形」の展開図である。中央の次数 6 の点は，鶴の背になる所で折り鶴の **中心** と呼ぶ。折り鶴の変形とは，図 1 に示された折り線の組み合わせ構造を変えずに，用紙形や折り線の位置を変形させて，鶴を折ることである（詳しくは，川崎 [5] 参照)。ジュスタン [4] は，折り鶴が折れる四辺形を特徴付けた。

**定理 1.1** 折り鶴が折れる四辺形の必要十分条件は，内接円を持つことである。

定理 1.1 は，凸でない四辺形に対しても成り立つ。なお，川崎 [5] では，非有界な四辺形に対しても変形折り鶴を拡張して考察しているが，本稿では有界な四辺形（四角形）のみを扱う。四辺形 $ABCD$ が内接円を持つ必要十分条件は，対辺の長さの和が等しいすなわち

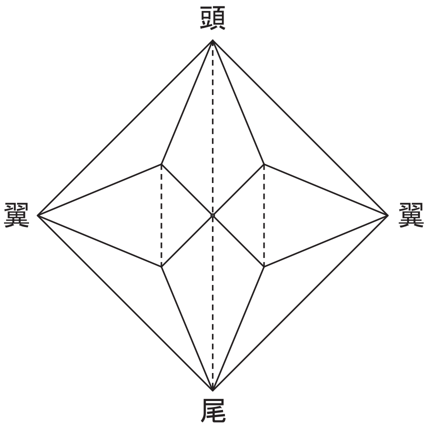


図 1: 鶴の基本形の展開図

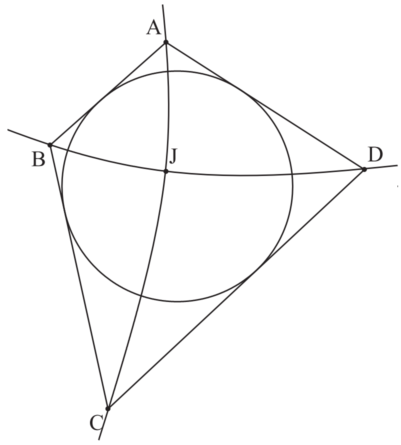


図 2: 対鶴曲線と鶴心

$AB+CD=BC+DA$ が成り立つことである。このとき，一方の対頂点 $A$ と $C$ を焦点とし，他方の対頂点 $B$ と $D$ を通る双曲線が存在し，**対鶴曲線**と呼ぶ（図 2）。内接円を持つ四辺形 $ABCD$ で，頂点 $A$,$C$ を頭と尾とし，$B$,$D$ を翼とする折り鶴を折るとき，鶴の中心は，$B$,$D$ を結ぶ対鶴曲線上の任意の位置に取ることができる。従って，２本の対鶴曲線の交点 $J$ に鶴の中心を取った場合は，四辺形のどちら側の角を翼にすることもできる鶴の基本形が折れることになる。この性質を**首翼互換性** と呼び，このときの鶴の中心 $J$ を，内心四辺形の **鶴心**と呼ぶ。例えば，四辺形 $ABCD$ が対角線 $AC$ を対称軸とする凧形の場合，$A$,$C$ を通る対鶴曲線は線分 $AC$ となるので，$A$,$C$ を翼とする鶴は菱形と同様に折ることができるが，$B$,$D$ を翼とする左右対称な鶴は，中心を鶴心に取った場合しか折ることができない。凧形の鶴心は，伏見 [1] によって，三角形 $ABC$ の内心 $I$ から，対角線 $AC$ に下した垂線の足として作図できることが示されている。一方，一般の内接円を持つ四辺形に対して，鶴心を作図するには２次曲線が必要で，これを折り紙で作図する具体的な方法は知られていなかった。本稿では，折り紙の作図にコンパスを補助具として加えて，鶴心を作図する方法を与えることを目的とする。

## ２．２次曲線の双対性と接線の性質

この節では，鶴心の作図に必要な，２次曲線の基本性質を復習する。座標平面において，点 $P(u,v)$ に対して，直線 $\bar{P}: ux+vy+1=0$ を対応させ，逆に直線 $L: ux+vy+1=0$ に対して，点 $\bar{L}(u,v)$ を対応させる相反変換を考える。このとき，原点以外の点と，原点を通らない直線が一対一に対応する。また点 $P$ と直線 $L$ に対して，定義から明らかに双対性 $\bar{\bar{P}}=P$, $\bar{\bar{L}}=L$ が成立する。この双対関係を，２次曲線に対して次のように拡張する（[8, 定義 3.1] 参照）。

**定義 2.1** ２次曲線 $Q: ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ は，$ae^2-2bde+cd^2+(b^2-ac)f\neq 0$ の条件を満たすとする。このとき，２次曲線 $\bar{Q}: (e^2-cf)x^2+2(bf-ed)xy+(d^2-af)y^2+2(cd-be)x+2(ae-bd)y+(b^2-ac)=0$ を $Q$ の双対と呼ぶ。

２次曲線 $Q$ が定義 2.1 の条件を満たすとき，$\bar{Q}$ も同様の条件を満たし，双対性 $\bar{\bar{Q}} = Q$ が成り立つことに注意する。さらに，点と直線と２次曲線の双対関係に対して，次の性質が成り立つ（[8, 命題 3.4] 参照）。

**命題 2.2** 点 $P$，直線 $L$，２次曲線 $Q$ は，それぞれ双対を持つとき，次の関係が成り立つ。

1. $P \in L \Leftrightarrow \bar{P} \ni \bar{L}$
2. $P \in Q \Leftrightarrow \bar{P}$ は $\bar{Q}$ に接する
3. $L$ は $Q$ に接する $\Leftrightarrow \bar{L} \in \bar{Q}$

平面上で，点 $F$ を直線 $L$ に重ねるように折った折り線は，$F$ を焦点とし，$L$ を準線とする放物線の接線であることは，よく知られている。ここで，直線 $L$ を円に換えると，楕円や双曲線の接線が得られる。準線の役割をするこの円のことを**宙円**と呼ぶ（飯島 [3] 参照）。

**命題 2.3** 平面上に，中心 $F'$，半径 $r$ の円 $S$ と，円周上でない点 $F$ が与えられているとする。点 $F$ と円 $S$ 上の点の垂直２等分線は，２点 $F, F'$ を焦点とする以下の２次曲線 $Q$ の接線である（$Q$ 上の点を $P$ とする）。

(1) 点 $F$ が円 $S$ の内部にある場合：$F'P + FP = r$ で決まる楕円（図 3）。
(2) 点 $F$ が円 $S$ の外部にある場合：$|F'P - FP| = r$ で決まる双曲線（図 4）。

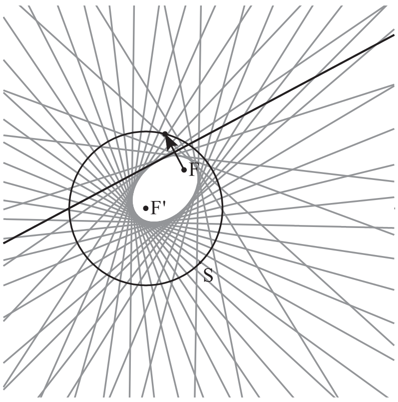


図 3: 折り紙による楕円

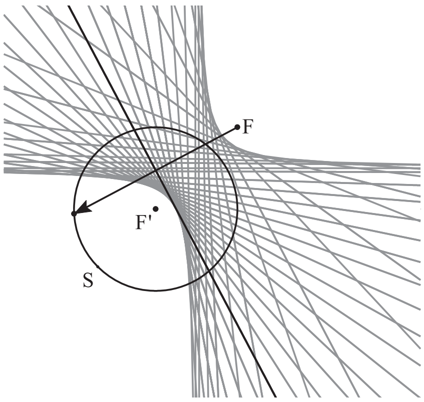


図 4: 折り紙による双曲線

２つの焦点の中点を原点 $O$ とし，直線 $FF'$ を $x$ 軸として座標を決めると，命題 2.3 の２次曲線 $Q$ は以下の方程式で表される（$FF' = 2k$ とする）。

(1) 点 $F$ が円 $S$ の内部のとき，$Q : \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha = r/2,\ \beta = \sqrt{\alpha^2 - k^2})$

(2) 点 $F$ が円 $S$ の外部のとき，$Q : \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha = r/2,\ \beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2})$

## ３．鶴心の作図

内接円を持つ四辺形に対して，その鶴心 $J$ は，２つの対鶴曲線 $Q_1, Q_2$ の交点であるから，これらの双対を考えると，鶴心の双対 $\bar{J}$ は対鶴曲線の双対２次曲線 $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ の共通接線に対応する。命題 2.3 より，２次曲線の接線は，焦点と宙円が得られれば折り紙で作図できる。本稿ではこの原理を利用して，四辺形の鶴心を折り紙で作図する。

内接円を持つ四辺形 $ABCD$ に対して，直線 $BD$ を $x$ 軸とし，対角線 $AC$ と $BD$ の交点を原点 $O$ と定めて平面に座標を入れる。ただし，単位長 1 は任意に固定する。$AD = a,\ AB = b$ とし，$a > b$ と仮定する（四辺形 $ABCD$ は凧形や三角形でないと仮定しておく）。$BD$ の中点を $M$ とし，$OM = p,\ BD = 2k$ とする。$A, C$ を結ぶ対鶴曲線 $Q$ は，$B, D$ を焦点とする双曲線であるので，その方程式は，次式で表される。

$$Q : \frac{(x-p)^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{1}$$

ただし，$\alpha = \frac{a-b}{2},\ \beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ である。対鶴曲線 $Q$ と $x$ 軸の交点を $U$ とおくと，$UM = \alpha$ より，$U$ の座標は $(p - \alpha, 0)$ である。伏見 [1] により，点 $U$ は，三角形 $ABD$ の内心 $I$ から，$x$ 軸へ下した垂線の足に一致する（図 5, 6）。

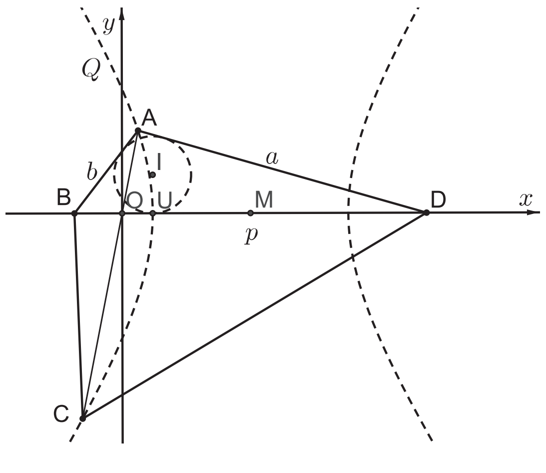


図 5: 座標（$p > \alpha$ のとき）

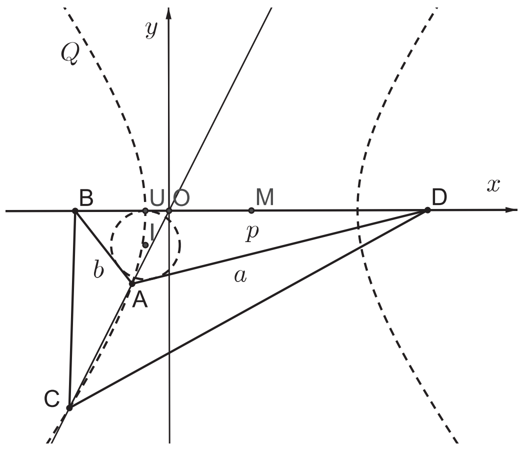


図 6: 座標（$p < \alpha$ のとき）

定義 2.1 より，双曲線 $Q$ の双対 $\bar{Q}$ は次の方程式で表される２次曲線である。

$$\bar{Q} : (p^2 - \alpha^2)x^2 + \beta^2 y^2 + 2px + 1 = 0 \tag{2}$$

**(i)** $A, C$ が直線 $BD$ で分けられた半平面の反対側にあるとき：
$p > \alpha$ に注意して，(2) を標準形に変形すると，

$$\bar{Q} : \frac{\left(x + \frac{p}{p^2-\alpha^2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}\right)^2} = 1 \tag{3}$$

従って，$\bar{Q}$ は，中心 $R(-\frac{p}{p^2-\alpha^2},0)$，長半径 $\xi=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$，短半径 $\zeta=\frac{\alpha}{\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}$ の楕円である。楕円 $\bar{Q}$ の焦点 $F,F'$ は $x$ 軸上にあり，中心から焦点までの距離 $d$ は，次式で与えられる。

$$d=\sqrt{\xi^2-\zeta^2}=\frac{\alpha}{\beta(p^2-\alpha^2)}\sqrt{k^2-p^2} \tag{4}$$

以上より，$\bar{Q}$ の焦点 $F,F'$ の $x$ 座標は，$-\frac{p}{p^2-\alpha^2}\pm d$ となる。これらを $X_1,X_2$ とおく。

命題 2.3 より，楕円 $\bar{Q}$ の宙円 $S$ は，焦点 $F'(X_1,0)$ を中心とする半径 $r=2\xi=\frac{2\alpha}{p^2-\alpha^2}$ の円であり，他方の焦点は $F(X_2,0)$ である（図 7）。

**(ii)** $A,C$ が直線 $BD$ で分けられた半平面の同じ側にあるとき：
$p<\alpha$ に注意して，(2) を標準形に変形すると，

$$\bar{Q}:\frac{\left(x-\frac{p}{\alpha^2-p^2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-p^2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\alpha^2-p^2}}\right)^2}=1 \tag{5}$$

従って，$\bar{Q}$ は双曲線であり，中心の座標は $R(\frac{p}{\alpha^2-p^2},0)$ である。$\xi=\frac{\alpha}{\alpha^2-p^2},\zeta=\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\alpha^2-p^2}}$ とおく。焦点 $F,F'$ は $x$ 軸上にあり，中心から焦点までの距離 $d$ は，次式で与えられる。

$$d=\sqrt{\xi^2+\zeta^2}=\frac{\alpha}{\beta(\alpha^2-p^2)}\sqrt{k^2-p^2} \tag{6}$$

以上より，$\bar{Q}$ の焦点 $F,F'$ の $x$ 座標 $X_1,X_2$ は，$\frac{p}{\alpha^2-p^2}\pm d$ となり，これは (i) のケースと同じである。命題 2.3 より，双曲線 $\bar{Q}$ の宙円 $S$ は，焦点 $F'(X_1,0)$ を中心とする半径 $r=2\xi=\frac{2\alpha}{\alpha^2-p^2}$ の円であり，他方の焦点は $F(X_2,0)$ である。

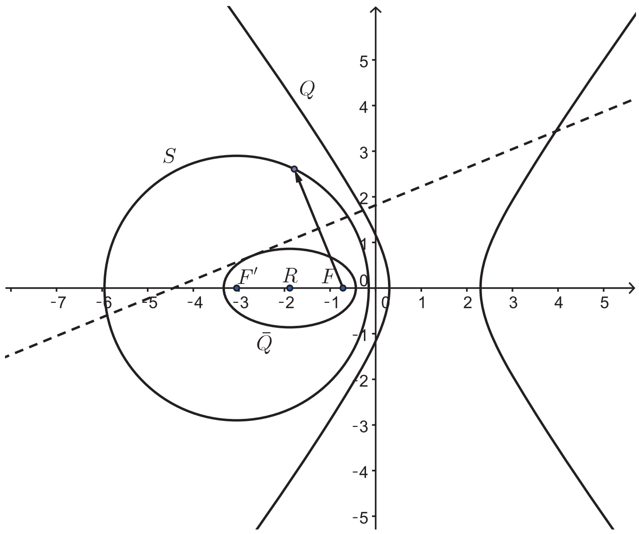


図 7: 対鶴曲線の双対とその宙円

ここで，宙円 $S$ の中心と焦点 $F$ の座標 $X_1, X_2$ および宙円の半径 $r$ は，いずれも与えられた $a, b, c, d, p, k$ から，四則と開平によって得られるので，定規とコンパス－従って折り紙で作図することができる。対鶴曲線 $Q$ の双対 2 次曲線 $\bar{Q}$ の宙円 $S$ と焦点 $F$ が作図できると，命題 2.3 から折り紙の作図によって，$\bar{Q}$ の接線が得られる。この原理を利用すれば，内接円を持つ四辺形 $ABCD$ の鶴心 $J$ は以下の手順で作図できる。

＜鶴心の作図手順＞

1. 直線 $BD$ を $x$ 軸，対角線の交点を原点 $O$ とする座標系の下で，$A, C$ を結ぶ対鶴曲線 $Q_1$ の双対 2 次曲線 $\bar{Q}_1$ の焦点 $F_1$ と宙円 $S_1$ の中心，および宙円の半径 $r_1$ の長さの線分を折り紙で作図し，この値を半径に取って宙円 $S_1$ をコンパスで描く。
2. 同様に，直線 $AC$ を $x$ 軸，対角線の交点を原点 $O$ とする座標系の下で，$B, D$ を結ぶ対鶴曲線 $Q_2$ の双対 2 次曲線 $\bar{Q}_2$ の焦点 $F_2$ と宙円 $S_2$ の中心および宙円の半径 $r_2$ の長さの線分を折り紙で作図し，この値を半径に取って宙円 $S_2$ をコンパスで描く。
3. 点 $F_1$ を円 $S_1$ に重ねると同時に，点 $F_2$ を円 $S_2$ に重ねるように折る（図 8）。このような折り方は 4 通りあるが，そのうち 1 つの折り線は，鶴心 $J$ の双対 $\bar{J}$ である。
4. 直線 $\bar{J}$ の双対として，鶴心 $J$ を作図する。具体的には，原点 $O$ から直線 $\bar{J}$ に下した垂線の足を $H$ とするとき，$OJ = 1/OH$ を満たす $OH$ の外分点として $J$ を得る。

**注意.** 手順 1 で，単位長 1 の決め方は任意であるが，$\sqrt{|p^2 - \alpha^2|}$ を 1 と決めると，手順 1 は簡略化する。ただし，手順 2 では最初に決めた単位長を変えることはできない。

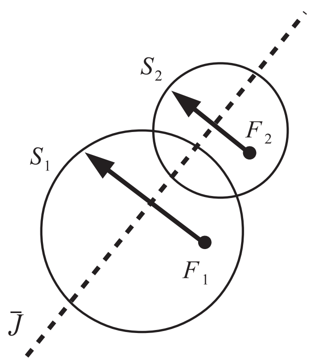


図 8: 作図公理 O11

【円を利用した折り紙作図】

手順 3 で用いた図 8 の折り方は，円を利用した折り紙作図であり，純粋な折り紙作図（藤田の公理 O1〜O7）に当てはまらない方法を使っている。[7, 8] では，折り紙作図にコンパスを加えた拡張が研究されている。折り紙の作図に「点と円を重ねるように折る」という操作を加えると，４種の作図公理が増え，それらは O8〜O11 で表される。

O8 点 $P_1$ を円 $C$ に重ねるように，点 $P_2$ を通る折り線で折る
O9 点 $P_1$ を直線 $L$，点 $P_2$ を円 $C$ に重ねるように折る
O10 点 $P$ を円 $C$ に重ねるように，直線 $L$ の垂線で折る
O11 点 $P_1$ を円 $C_1$ に，点 $P_2$ を円 $C_2$ に重ねるように折る

この表記では，図 8 の折り操作は，O11 と表される。また,「直線が円に接するように折る」,「円が円に接するように折る」などの操作も許すと，さらに 27 通りの円を利用した作図公理が生じる（[8, 定理 3.9]）。しかし，折り紙の作図にコンパスを加えて拡張しても，それによって作図可能な数の範囲は増えないことが知られている（[8, 注意 4.3] 参照）。

**定理 3.1.** 折り紙にコンパスを加えて作図可能な数の範囲は，折り紙だけで作図可能な数の範囲と一致する。これは，与えられた数から，四則と高々３次の方程式の解を取る操作を有限回繰り返して得られる範囲であり，始めに与えられた数を 1 とすると，ヴィエトの体 $\mathbb{V}$ と呼ばれるものに一致する（[6, Theorem 10.14]）。

定理 3.1 より，コンパスを補助具として使わずに，純粋な折り紙作図（藤田の公理 O1〜O7）だけで鶴心を作図することも理論的には可能であるはずだが，その具体的方法については未解決である。

参考文献

[1] 伏見康治，伏見満枝，“折り紙の幾何学”，日本評論社，1979.

[2] 笠原邦彦，前川淳，“ビバおりがみ”，サンリオ，1983.

[3] 飯島忠，“２次曲線の接線と２次曲線の焦点の性質”，日本数学教育学会誌 70(9) (1988), pp.38-45.

[4] Justin J., “Mathematical Remarks and Origami Bases”, Symmetry: Culture and Science, Vo.5, No.2 (1994), pp.153-165.

[5] 川崎敏和，“バラと数学と折り紙と”，森北出版，1998.

[6] Martin G.E., “Geometric Constructions”, Springer-Verlag, 1998.

[7] Kasem A., Ghourabi F., Ida T., “Origami axioms and circle extension”, SAC’11 March 21-25 (2011), TaiChung, Taiwan, pp.1106-1111.

[8] 西村保三，“コンパスと折り紙による作図公理”，福井大学教育地域科学部紀要 4 (2013), pp.67-79.