論文名 Title	正４面体と立方体の 共通の展開図に関する研究	On Common Unfolding of a Regular Tetrahedron and a Cube
著者 Author(s)	白川俊博　堀山貴史　上原隆平	Toshihiro Shirakawa, Takashi Horiyama, Ryuhei Uehara
受理年月日 Date of acceptance	2015/2/8	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（”Science of Origami”）2015/3/31 Vol. 4 No. 1 page 45-54	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

正 4 面体と立方体の共通の展開図に関する研究

白川俊博 (ZVB03747@nifty.ne.jp)
アマチュア数学者

堀山貴史 (horiyama@al.ics.saitama-u.ac.jp)
埼玉大学 情報メディア基盤センター
〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255

上原隆平 (uehara@jaist.ac.jp)
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
〒923-1292 石川県能美市旭台 1-1

On Common Unfolding of a Regular Tetrahedron and a Cube

Toshihiro Shirakawa (ZVB03747@nifty.ne.jp)
Amateur mathematician

Takashi Horiyama (horiyama@al.ics.saitama-u.ac.jp)
Information Technology Center, Saitama University
Shimo-Okubo 255, Sakura-ku, Saitama-shi, Saitama 338-8570, Japan.

Ryuhei Uehara (uehara@jaist.ac.jp)
School of Information Science, JAIST
Asahidai 1-1, Nomi, Ishikawa 923-1292, Japan.

要約：立方体と，正 4 面体に極めて近い 4 単面体の共通の展開図を構成する手続きを示す．4 単面体の辺の長さは調節可能である．極めて小さい誤差を許せば，この手続きは停止して，立方体と，ほぼ正 4 面体の共通の展開図を生成する．誤差を許さずに，立方体と正 4 面体の共通の展開図を生成するように辺の長さを指定すると，この手続きは停止しない．生成される無限の点の集合は，立方体と正 4 面体の共通の展開図に収束すると予想しているが，証明はできていない．この手続きを用いると，与えられた連分数に対するフラクタル構造をデザインすることができる．

Abstract: A procedure that produces a common unfolding of a regular tetrahedron and a cube is given. It is adaptable to the length of an edge. If we allow a small error of the length of an edge of the tetrahedron, the procedure certainly halts and generates a common unfolding of a cube and an almost regular tetramonohedron.

正 8 面体と 4 単面体	[3, Figure 25.50]
正 4 面体と大きさ $1 \times 1 \times \sqrt{3} - 1/2 = 1.232$ の直方体	[3, Figure 25.51]
立方体と大きさ $1 : \sqrt{34}/6 : \sqrt{34}/6 = 0.9718$ の 4 面体	[6]
正 8 面体と大きさ $1.0072 : 0.9965 : 0.9965$ の 4 面体	[6]
正 20 面体と大きさ $1 : 1.145 : 1.25$ の 4 面体	[4]

表 1　正多面体と別の多面体の共通の展開図

If we wish to generate the common unfolding of them with accuracy, we conjecture that the procedure does not halt and we obtain the common unfolding in the limit as a set of infinitely many points. The procedure has a potential to design a fractal structure given in a continued fraction form.
Keywords: Common unfolding, cube, fractal, regular tetrahedron, tetramonohedron.

1　はじめに

近年，2 つの異なる多面体を折れる多角形がいくつも見つかっている (表 1)．こうした多角形は多面体の共通展開図と呼ばれている．なお，展開図は多面体の面を切り開く場合もあることに注意する．例えば図 1 は立方体の展開図の例である．日本の小学校で習う「展開図」は辺に沿って切るので「辺展開図」と呼んで必要に応じて区別する．こうした印象的な展開図を見ていると，複数の異なる正多面体の間に共通の展開図はないのだろうかという疑問が生じる．この問題は独立に何度も提起され，今なお未解決である ([3, Section 25.8.3])．

本稿では，立方体と正 4 面体の共通の展開図を生成する手続きを与える．なお本稿で立方体と言ったときは，いつでも大きさ $1 \times 1 \times 1$ の単位立方体を指すこととする．この手続きでは，4 面体の辺の長さを 2 つのパラメータで調整することができる．つまり，より正確に言えば，この手続きは立方体と，ほぼ正 4 面体である 4 単面体との共通の展開図を生成する方法を与える．この手続きは上記の未解決問題に対して，ある意味で肯定的な解答を与えている．極めて小さい誤差 $\epsilon > 0$ を与えると，この手続きは停止して，すべての辺の長さが区間 $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ に収まるようなほぼ正 4 面体と，立方体との間の共通の展開図を生成することができる．ここで ℓ は $\ell = \sqrt{2\sqrt{3}}$ であり，これは表面積が 6 である正 4 面体の 1 辺の長さである．

本手続きで生成される展開図では，一般に連結性が保証されない．したがってパラメータを無計画に選ぶと，非連結な展開図が得られる場合がある．実験的な結果から，展開図の連結性を保証できるパラメータの具体的な選び方はわかっている．そこで実験に基づいてパラメータを選び，誤差が $\epsilon < 2.89200 \times 10^{-1796}$ であるほぼ正 4 面体と立方体の共通の (連結な) 展開図を得た．任意の $\epsilon > 0$ に対して，この方法がうまくいくことの数学的な証明は未解決である．またこの方法で，誤差 0 の立方体と正 4 面体の共通の展開図を生成しようとすると，展開図上の点は無限個生成される．これを展開図と呼ぶことには異論もあると考えられ，こうした無限の点で定義される図形に関する議論が別途必要となる．

本稿ではこの問題には立ち入らない．

辺の長さを調節するパラメータの値と，展開図の形に現れるパターンには密接な関係がある．具体的には，パラメータの値の連分数展開による表現と，展開図の形に現れる繰り返しパターンには密接な関係が見てとれる．この関係に対する数学的な証明は今のところ与えられていないが，単純な値の無限の繰り返しの連分数展開で表現できる実数に対して，この関係を利用する方法を示す．具体的には，本稿で示す手続きをこうした単純な連分数表現を持つ実数に対して適用すると，いわゆるフラクタル曲線を簡単に生成できる．

なお，本研究は国際会議 EuroCG 2011 で概要を発表したものである [7] が，いくつかの予想が数学的に証明できなかったため，詳細を発表していなかった．未発表のまま埋もれてしまうのは惜しい結果であると判断し，いくつかの予想は未解決問題としたまま，今回発表することとした．

2　準備

まず凸多面体の展開に関する基本的な結果をいくつか示す．

補題 1 ([3, Sec. 22.1.3]) 凸多面体 X の任意の展開図を P とする．すると X のすべての頂点は，P の内部の点にはならない．つまり P の境界線上の点である．

平面上の多角形を P とし，P の境界線上の 4 点の集合を R とする．このとき P をコピーして，R の各点について 180° 回転して張り付けることを繰り返す．この操作で平面を重なりもすき間もなく埋めつくすことができるとき，P は $p2$ タイリングであるといい，R の各点を回転中心と呼ぶ．この回転によるタイリングは平面上の点の同値関係を定義する．つまり平面上の点 p_1 が，このタイリングによって点 p_2 に移動するとき，p_1 と p_2 は互いに同値であるとする．タイリングに関する詳細は例えば [5, 8] を参照されたい．*4* 単面体とは 4 つの合同な三角形から構成される 4 面体である．p2 タイリングを使うと，4 単面体の展開図に関する完全な特徴づけが得られる．

定理 2 ([1, 2]) P が 4 単面体の展開図である必要十分条件は，以下の 3 つの条件を満たすことである．(1) P は p2 タイリングである．(2) p2 タイリングの 4 つの回転中心が，4 単面体の合同な三角形の面で構成される三角格子の交点を構成する．(3) p2 タイリングの 4 つの回転中心は，互いに同値ではない．

定理 2 の三角格子を正三角形に基づくものとすれば，正 4 面体の展開図の完全な特徴づけとなる．

3　共通の展開図の生成手順

まず図 1 に示した，立方体の展開図 P_1 から始める．図中の太線で示したものが立方体の展開図である．ただし点 c_1, c_2, p, p' は対応する辺の中点である．ここで，P_1 は定理 2 の条件を満たしていることがわかる．つまり 4 点 c_1, c_2, c_3, c_4 は，それぞれ $p2$ タイリングの回転中心となっており，これはすなわち P_1 が 4 点 c_1, c_2, c_3, c_4 を頂点とする 4 単面

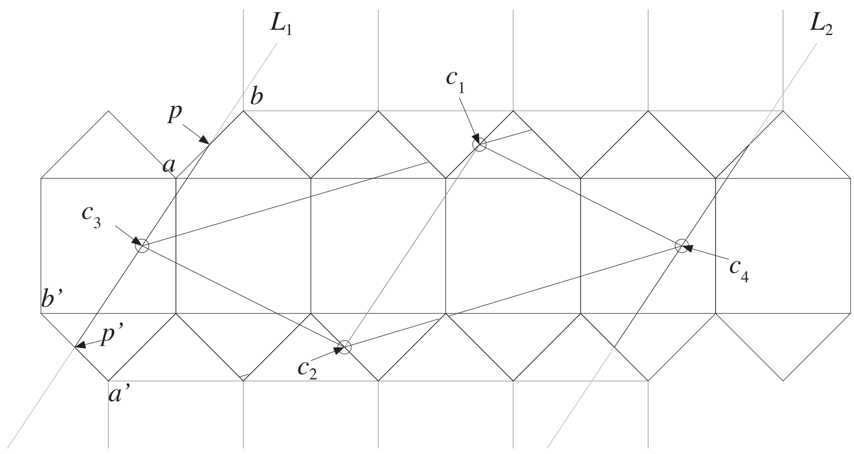

図 1　立方体の最初の展開図 P_1

体の展開図でもあることを示している．ここで，直線分 c_1c_2 が 2 本の直線 L_1 や L_2 と平行になっていて，$p2$ タイリングが直線 L_1 と L_2 で「平行な帯」に分割されていることに注意する．この帯状の部分は互いに自由に上下にずらすことができ，その結果，無限に多くのタイリングを生成することができる．これは展開図の上で言えば，回転中心 c_3 と c_4 を対称性を保ちながら，L_1 と L_2 の上で，それぞれ自由な位置に移動できることを示している．つまり $|c_1c_3| = |c_2c_4|$(あるいは $|c_1c_4| = |c_2c_3|$) を満たす位置であれば，c_1c_2 が固定された，表面積が同じ無限種類の 4 単面体を折ることができる．言いかえれば，P_1 は，立方体と無限種類の 4 単面体の共通の展開図なのである．(文献 [3, Section 25] の言葉を借りれば，L_1 と L_2 は回転ベルトになっていて，どこから閉じても辺 c_3c_4 を構成できる．)

ここで $|c_1c_2| = \sqrt{13}/2 = 1.80278$ であり，4 つの合同な三角形の面積は 3/2 である．したがって図 1 で L_1 上と L_2 上に $|c_3c_1| = |c_3c_2| = |c_4c_1| = |c_4c_2|$ となる位置に c_3 と c_4 を取れば，次の補題を得る．

補題 3 立方体と，辺の長さが $\sqrt{13}/2 : \sqrt{745/208} : \sqrt{745/208} = 1.80278 : 1.89255 : 1.89255$ である 4 単面体の共通の展開図が存在する．

補題 3 で得られる 4 単面体は，既知の結果と比べても正 4 面体に近い．目標は，これらの辺の長さをすべて同じ値 $\sqrt{2\sqrt{3}} = 1.86121$ に，より近づけることである．

本稿では，この P_1 を変形する手続きを提案する．より正確に言えば，図 1 の c_1 を右に，c_2 を左にそれぞれ少し移動して，2 点間の距離を伸ばす手続きである．この変形の間に変化しない 2 つの性質を不変性として定式化しておく：(1) P_1 は変形後も立方体の展開図である．(2) P_1 は 4 単面体の展開図であり，かつ辺の長さについて $|c_1c_3| = |c_1c_4| = |c_2c_3| = |c_2c_4|$ がいつでも成立する．この不変性 (1)(2) を維持したまま変形を実行すると仮定すると，$|c_1c_2|$ が $\sqrt{2\sqrt{3}}$ になれば，立方体と正 4 面体の共通の展開図が得られることとなる．

点 c_1 と c_2 を移動すると，離散的な点の生成プロセスが発生する．後で示すように，

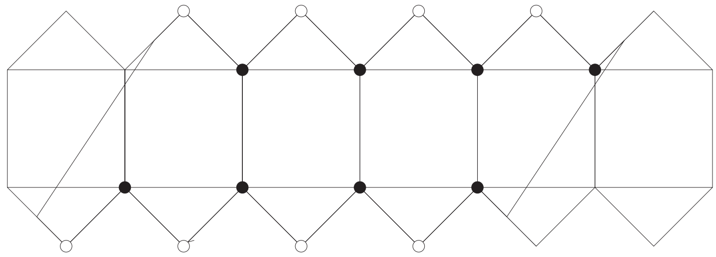

図 2　展開図上の不動点

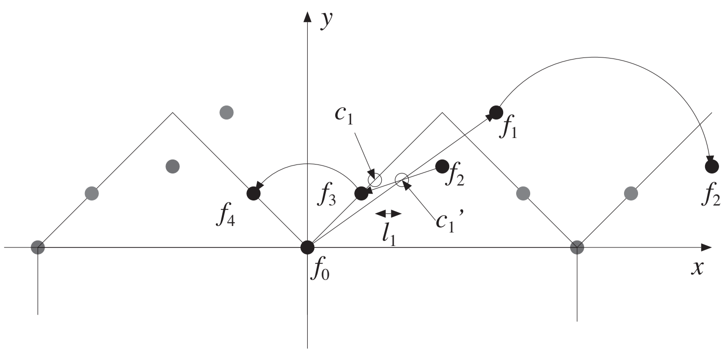

図 3　立方体と 4 単面体の共通の展開図の境界線上の点の構成方法

2 点間の距離 $|c_1c_2| = \sqrt{13}/2$ を $|c_1c_2| = \sqrt{2\sqrt{3}}$ にそのまま変更すると，点の生成プロセスは停止しない．そこで，「無限個の点集合の極限としての立方体と正 4 面体の共通の展開図」と「立方体と与えられた誤差 $\epsilon > 0$ のほぼ正 4 面体の共通の展開図」のどちらかを選ばなくてはならない．本稿では与えられた誤差 $\epsilon > 0$ に対して，辺の長さが $|c_1c_2| \in [\sqrt{2\sqrt{3}} - \epsilon, \sqrt{2\sqrt{3}} + \epsilon]$ である 4 単面体を誤差 $\epsilon > 0$ のほぼ正 4 面体と定義して議論を進めることとする．以下，2 点 c_1 と c_2 の間の距離 $|c_1c_2|$ を $\sqrt{13}/2 = 1.80278$ から $\sqrt{2\sqrt{3}} = 1.86121$ に近い値に伸ばす方法を具体的に示す．直感的には，c_1 と c_2 を図 1 で水平方向に少し遠ざければよい．

ここで図 2 の○に注目すると，これらの点は立方体のフタと底の中心にくる点である．これらの点が展開図上から取り除かれると，立方体の面に穴が開く．一方，この点が展開図の内部の点になると，立方体の面に重なりができてしまう．したがってこれらの点は P_1 の境界線上になければならない．一方補題 1 より，図 2 の●は立方体の頂点であることから，やはり P_1 の境界線上になければならない．これらの動かせない点のことを展開図の不動点と呼ぼう．

以下しばらく P_1 の上半分だけを考える．P_1 の上半分には 8 個の不動点と回転中心 c_1 がある．それ以外の点は，一旦すべて取り除く．つまりこの時点で「展開図上の辺」は不動点と回転中心だけになる．ここに展開図上の点を順にプロットして，最後にこれを線分でつないで求める展開図を生成する．正確のため，辺上に xy 座標軸を置く．c_1 に一番近い立方体の頂点を f_0 とし，この点の座標を原点 $(0, 0)$ とする (図 3)．立方体の辺は単位長なので，c_1 は最初 $(1/4, 1/4)$ にある．ここでずらし幅として，ある小さな値 ℓ_1 をと

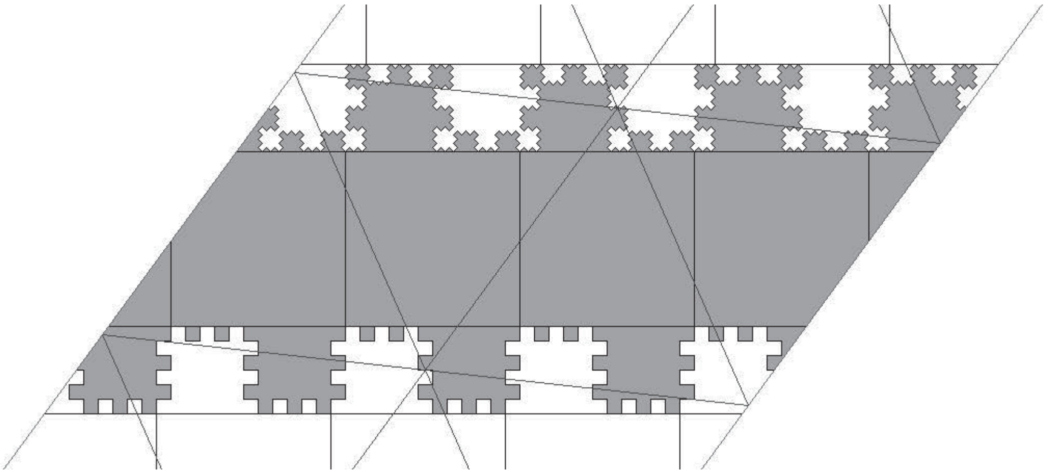

図 4　立方体とほぼ正 4 面体の共通の展開図の例

り，回転中心 $c_1 = (1/4, 1/4)$ を $c'_1 = (1/4 + \ell_1, 1/4)$ に移動したと考える．すると f_0 は不動点で c'_1 は新たな回転中心なので，$f_1 = (1/2 + 2\ell_1, 1/2)$ が展開図の境界線上の点となる必要がある[*1]．ここで，この展開図が立方体の展開図であったことを思い出すと，点 f_1 は立方体に折られたときには点 $f_2 = (1 + 1/2, 1/2 - 2\ell_1)$ に接着される．したがってこの f_2 も展開図の境界線上の点でなければならない．また，この展開図は立方体を対称に開いたものなので，この対称性を考えると，点 (x, y) と点 $(x - 1, y)$ に対して同値関係 $(x, y) \equiv (x - 1, y)$ を定義できる．よって点 $f_2 = (1 + 1/2, 1/2 - 2\ell_1)$ が展開図の境界線上の点であれば，同値な点 $(1/2, 1/2 - 2\ell_1)$ もまた展開図の境界線上の点である．(以下，この同値関係は適宜適用されるものとする．) この写像を繰り返し適用すれば，8 個の不動点と新たな回転中心 $c'_1 = (1/4 + \ell_1, 1/4)$ から，展開図の境界線上になければならない点の集合を計算することができる．この一連の手続きにおいて，以下の補題が成立する．

補題 4 上記の不動点の射影手続きが有限回数で停止する必要十分条件は，ずらし幅が ℓ_1 が有理数であることである．

証明: ある互いに素な自然数 p と q(ただし $0 < p < q$) に対して，ℓ_1 が有理数 $\frac{p}{q}$ であったとき，射影手続きによって移動できる点の集合は，大きさ $O(pq)$ の格子上の点に含まれる．したがって射影手続きを $O(pq)$ 回繰り返せば，いつか必ず同じ点を 2 回訪れて，そこで点集合が確定する．一方 ℓ_1 が有理数でない場合は，同じ座標は二度と現れないため，手続きは終了しない． □

上記の手続きを使うと，c_1 と c_2 を独立に水平方向にずらし，$|c_1c_2|$ を伸ばすことができる．具体的な展開図の構成方法は次の通りである．まず図 1 の展開図において適当なずらし幅を設定して，c_1 と c_2 をずらす．次に上記の手続きで展開図の境界線上の点集合をすべて計算する．そして点集合を直線で結んで展開図の上側の境界線と下側の境界線を確定する．最後に，ずらした結果の c_1c_2 と平行になり，かつ表面積が変わらないように

[*1] ずらし幅が $\ell = 0$ だと $f_1 = (1/2, 1/2)$ となり，別の不動点に一致することに注意する．

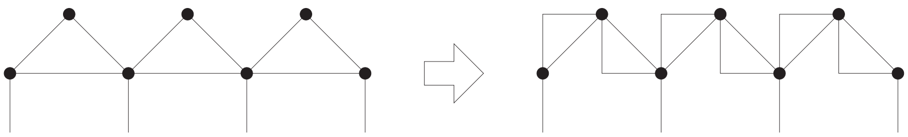

図 5　最初の変形

L_1 と L_2 を新たに引き直す．例えば図 4 は，$\ell_1 = 4/21$ と $\ell_2 = 5/24$ としたときに得られる，立方体とほぼ正 4 面体の共通の展開図である．

一般に，この方法では展開図の連結性を保証することはできない．具体的には，2 つの線分 L_1 と L_2 を引いたところで，展開図が非連結になる可能性がある．この 2 つの線分を引いても展開図が分割されないことを保証するためには，上記の手続きで生成される展開図の境界線について，もう少し定性的な解析が必要である．数多くの実験により，次の観測が得られた．しかし，離散的な点集合を結んで得られる展開図の境界線に関する以下の観察結果に，形式的な特徴づけや数学的な証明を与えることはできなかった．

観察 1 2 つの有理数 ϕ_1, ϕ_2 を連分数展開した結果を $\phi_1 = \frac{1}{a_1\pm}\frac{1}{a_2\pm}\frac{1}{a_3\pm}\cdots\frac{1}{a_k}$，$\phi_2 = \frac{1}{b_1\pm}\frac{1}{b_2\pm}\frac{1}{b_3\pm}\cdots\frac{1}{b_h}$ とする[*2]．この 2 つの有理数に対して $\ell_1 = (1-\phi_1)/4$, $\ell_2 = (1-\phi_2)/4$ とする．すると，展開図の上半分の辺は a_i の値を用いて次のように表現することができる．まず P_1 の不動点を図 5 のようにつなぐ[*3]．以下，a_i の値によって各線分を順にジグザグの「波状線」で置き換えていく（図 4）．この波状線は a_i が偶数であれば「方形波」で，奇数であれば「三角波」であり，またこのときジグザグのピークの個数は a_i の値で与えられる．それぞれの波状線が最初に向かう方向は a_i の符号によって決まる．下半分の辺についても同様である．

例えば図 4 では，$\ell_2 = (1-1/6)/4 = 5/24$ つまり $\phi_2 = 1/6$ である．この値を用いて点をプロットして展開図の下半分を構成すると，P_1 の辺は 6 個のピークを持つ方形波で置き換えられ，ϕ_2 の連分数展開 1/6 と合致した形になる．一方，上半分では $\phi_1 = 5/21 = 1/(4+1/5)$ である．実際に点をプロットして構成した展開図では，P_1 の各辺を，まず 4 個のピークを持つ方形波で置き換えて，次に，それぞれの線分をさらに細かい 5 個のピークを持つ三角波で置き換えたものとなる．

筆者らは観察 1 が成立することを予想しているが，正確な「波状線」の特徴づけやその証明は未解決である．しかしこの観察 1 が成立すると仮定して，実際に連結な展開図を構成することは可能である．具体的には，可能な値を全探索しながら交互に $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ の順番で値を確定し，目標とする値 $\ell_1 + \ell_2 = \sqrt{2\sqrt{3} - 9/4} - 1$ に近づけて行けばよい．このとき，a_i と b_i に偶数しか選ばないようにして，方形波だけが生成されるようにする．さらに a_i（b_i）が $4n$ のときは a_{i+1}（b_{i+1}）は正の数，a_i が

[*2] ここで使う「連分数展開」は標準的な連分数表現とは少し異なる．標準的な連分数展開では，各項 a_i に対して $a_i \geq 1$ であり，すべての符号は「+」である．一方，ここで使用している連分数展開は，「−」の符号も使用して，$i > 1$ のときに $a_i > 1$ が成立するようにしてある．

[*3] これは元の展開図の斜辺を三角波で置き換えたとも見なせるし，一方でこちらを元の展開図と考えたとも見なせるが，どちらの解釈が妥当かは不明である．

$4n+2$ のときは a_{i+1}（b_{i+1}）は負の数にする必要がある．さもないと，方形波の並びの入れ子の部分で紙が非連結になってしまう．こうした観察に基づく工夫をしながら探索を進めて実際に構成していけば，連結性の保証された展開図を生成することができる．このアイデアに基づく全探索型のアルゴリズムを構築し，実際に先頭の 50 項を計算したところ，$a_1 = 4, b_1 = 6, a_2 = 6, b_2 = -34, a_3 = -42, b_3 = -14, a_4 = -116, b_4 = -2146, a_5 = 4010, b_5 = -3316, a_6 = -4958, b_6 = 8684, a_7 = -7820, b_7 = 7082, a_8 = 2668, b_8 = -3684, a_9 = 4564, b_9 = 1662, a_{10} = 560, b_{10} = -158, \ldots, a_{49} = -901022501217813223698882246, b_{49} = 430381144999075131422356706, a_{50} = -1990926111818830489021958 58, b_{50} = -400283864262758857598851979 4$. という値が得られた．$a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ と $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ を採用すると，誤差は $\epsilon < 4.63451 \times 10^{-56}$ となり，a_{50} と b_{50} まですべて採用すると誤差は $\epsilon < 2.89200 \times 10^{-1796}$ となった．以上より次の定理が成立する．

定理 5 誤差 $\epsilon < 2.89200 \times 10^{-1796}$ に対して，立方体と誤差 ϵ のほぼ正 4 面体の共通の展開図が存在する．

もちろん 50 という数に特別な意味はなく，このアルゴリズムをより大きな数に対して適用すれば，いくらでも誤差を小さくできるように見えるが，現時点ではこれも証明は与えられていない．

予想 1 任意の ϵ に対して，立方体と誤差 ϵ のほぼ正 4 面体の共通の展開図が存在する．

4　まとめと課題

本稿では，立方体とほぼ正 4 面体がどちらも折れる共通の展開図の生成方法を示した．しかしこの方法で立方体と正確な正 4 面体の共通の展開図を生成するには，無限個の点が必要となることがわかった．この点が収束するかどうかは現時点では不明だが，無限個の点が収束したとしても，これを展開図と呼んでいいかどうかは，議論の余地がある．逆に無限個の点が必要であることを理由に，立方体と正 4 面体の共通の展開図は存在しないという議論もありうるだろう．いずれにせよ，本稿で提案した方法によって生成される点集合と，これによって定義される展開図については，より精緻な議論が必要となる．特に観察 1 の成立を証明することは，重要である．同様の方法で他の正多面体と正 4 面体の共通の展開図も構築できるかもしれない．

正 4 面体以外の正多面体の間の共通の展開図を見つけることは，タイリングによる特徴づけ (定理 2) が使えないことから，より困難な未解決問題であろう．直感的には，こうした共通の展開図は到底ありそうには思えない．しかし，第一著者は立方体と 8 面体の共通の展開図を見つけている (図 6)．この 8 面体は 2 つの正 3 角形 (辺の長さは $\sqrt{2}$) と 6 つの二等辺 3 角形 (辺の長さは $\sqrt{2}, \sqrt{24-6\sqrt{3}}/3, \sqrt{24-6\sqrt{3}}/3$) から構成されている．(直感的には 6 つの二等辺 3 角形で作った筒に，2 つの正 3 角形が底と蓋になっていると思えば理解しやすいだろう．）こうした例がある以上，否定的な結果を示すことも，それほど容易ではないと考えられる．

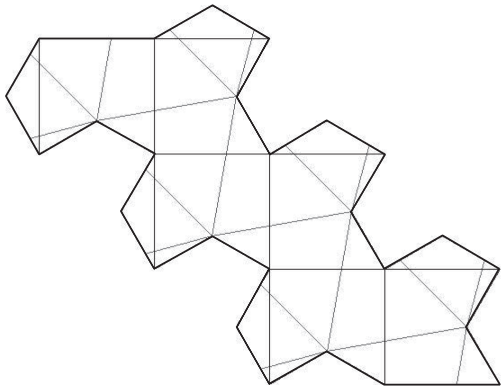

図 6　立方体と 8 面体の共通の展開図

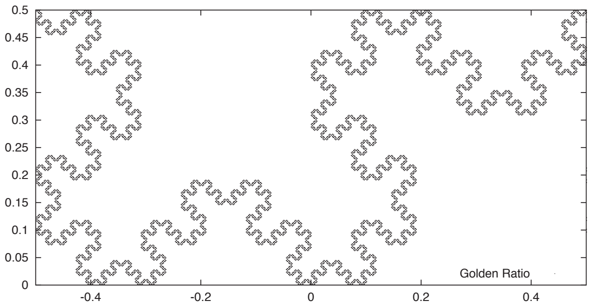

図 7　黄金比 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$ に基づいて 5000 点描いたところ

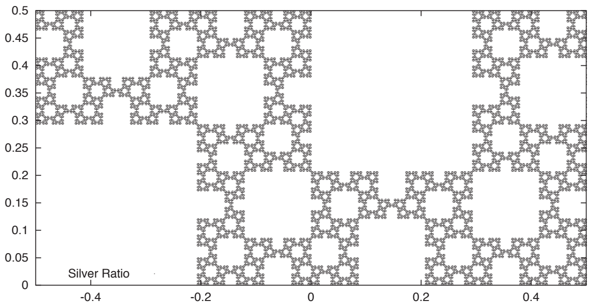

図 8　白銀比 $\phi = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$ に基づいて 10000 点描いたところ

付録

展開図とは関係ないが，観察 1 の成立を仮定すると，実数 ϕ をうまく選べばフラクタルパターンを簡単に生成することができる．実行例を図 7 と図 8 に示す．

参考文献

[1] J. Akiyama. Tile-Makers and Semi-Tile-Makers. *American Mathematical Monthly*, 114:602–609, 2007.

[2] J. Akiyama and C. Nara. Developments of Polyhedra Using Oblique Coordinates. *J. Indonesia. Math. Soc.* , 13(1):99–114, 2007.

[3] E. D. Demaine and J. O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007. (邦訳：『幾何的な折りアルゴリズム』上原隆平訳，近代科学社，2009 年．)

[4] T. Horiyama and R. Uehara. Nonexistence of Common Edge Developments of Regular Tetrahedron and Other Platonic Solids. In *China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications (CGGA 2010)*, 2010.

[5] D. Schattschneider. The plane symmetry groups: their recognition and notation. *American Mathematical Monthly*, 85:439–450, 1978.

[6] T. Shirakawa. Unpublished. 2010.

[7] T. Shirakawa, T. Horiyama and R. Uehara. Construct of Common Development of Regular Tetrahedron and Cube. In *27th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2011)*, pp. 47–50, 2011.

[8] 伏見康治，安野光雅，中村義作．『美の幾何学』．ハヤカワ文庫，2010.