

論文名 Title	折りたたみ可能な切開辺を含む 立体形状の設計	A method for designing flat-foldable 3D polygonal models
著者 Author(s)	加瀬悠人, 金森由博, 三谷純	Yuto Kase, Yoshihiro Kanamori, Jun Mitani
受理年月日 Date of acceptance	2016/3/31	
掲載 First publish	『折り紙の科学』 (“Science of Origami”) 2016/3/31 Vol. 5 No. 1 page 4-16	
備考 Note		

日本折紙学会  
Japan Origami Academic Society  
[www.origami.jp](http://www.origami.jp)

# 折りたたみ可能な切開辺を含む立体形状の設計

加瀬悠人 金森由博 三谷純

筑波大学

305-8573, 茨城県つくば市天王台 1-1-1

kase@npal.cs.tsukuba.ac.jp

{kanamori, mitani}@cs.tsukuba.ac.jp

A method for designing flat-foldable 3D polygonal models

Yuto Kase, Yoshihiro Kanamori, Jun Mitani

University of Tsukuba

305-8573, Tennoudai 1-1-1, Tsukuba, Ibaraki, JAPAN

**要約** 立体形状を平坦に折りたたむことは、収納スペースを小さくし、保管や搬送のコストを抑える上で有効な手段である。本研究では、折りたたみ可能な立体形状を、対話的な操作で容易に設計可能なシステムの開発を行った。対象となる形状は、上下に水平な面を持つ多面体であり、水平な折り線部を持つ。提案手法の主要なアイデアは、隣接する側面形状の間に切り込みを加え、隣接する側面形状が折りたたみ時に分離することを許容した点にある。さらに、複数の立体を組み合わせることで、複雑な形状も扱えるようにした。

**Abstract:** Folding objects compactly is essential to conserve storage space and carrying costs. We propose a method for designing 3D polygonal models that can be folded flat, which consist of side panels as well as horizontal top and bottom panels. The key idea in designing flat-foldable models is to add vertical slits along the edges of side panels; the horizontally adjacent side panels are separated in the folded state, and are connected to form a closed solid model in the deployed state. In addition, we can make complex models by composing flat-foldable units.

**Keyword:** polyhedron, flat-folding, design

## 1. はじめに

立体を折りたたむことは、使用しない時に小さい収納スペースに格納し、必要に応じて瞬時に大きく広げることを実現するために必要な技術である。このような技術が必要な車のエアバッグ[7]や人工衛星の太陽光パネル[8]に対して、折り紙工学が大きく貢献してきた。しかし、閉じた立体は切り込みを入れない限り、折りたたみできないことが Cauchy[1], Connelly や Sabitov[2]によって示されているため、折りたたみ可能な立体の設計は容易ではなく、切込みを加える

ことにより展開・折りたたみを実現するポップアップカードの設計手法[3][4][5][6]が提案されている。これらの手法で生成されるモデルは 90 度または 180 度開いて立体形状が立ち上がる。

本手法では折り紙工学と CG 技術を用いて、辺の分離により上下方向に折りたたみと展開が可能な多面体モデルの設計を支援する手法を提案する。対象とする多面体モデルは、図 1 に示すように、天頂面と底面が水平であり、側面は水平な辺と垂直面上に位置する辺から構成される。水平な辺はヒンジ構造を持ち開閉角度を変化させることができる。折りたたむ前には完全に閉じた状態であるが、平坦に折りたたんだ状態および折りたたみ過程の状態では垂直面上の辺が分離する（中央図）。提案する設計支援システムでは、多面体モデルの天頂面と底面および断面を構成する折れ線を入力とし、上記の条件を満たす立体を自動生成する。折りの構造は水平な辺に割り当てられるヒンジ構造のみであるため、折りたたみ可能な立体を制作する問題は、断面から見た 2 次元平面上での折れ線の折りたたみ問題に帰着できる。そのため、本稿では、主に折れ線の折りたたみについての議論が中心となる。一般に、端点の位置が拘束された任意の折れ線は平坦に折りたたむことができない。そこで本手法では、入力として与えられた折れ線を自動修正し、平坦に折りたためるようにする。さらに、生成された折りたたみ可能な立体形状を複数組み合わせることにより、図 2 で示すようなより複雑な形状の折りたたみも扱えるようにする。

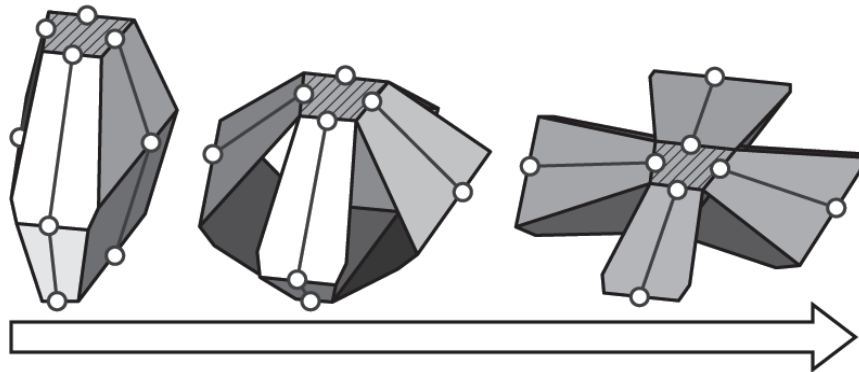


図 1 本研究で対象とする立体の形状の例。斜線の四角形は天頂面，各折れ線は各側面の断面線，白色の丸は断面線の頂点である。

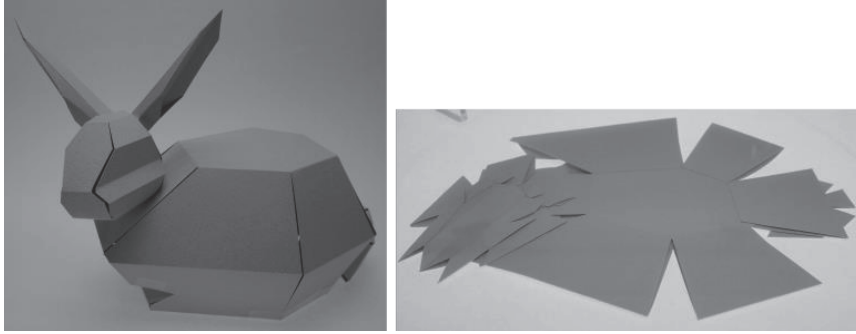


図 2 複数の折りたたみ可能な立体形状を組み合わせたモデル(スタンフォード・バニー)の試作例.

## 2. 提案手法

本手法は、下記のような 6 つのステップから構成される.

- (1) 天頂面の凸多角形状と、天頂面の辺数だけ側面形状(断面線)を入力することにより、初期多面体モデルを生成する.
- (2) 各側面の折りたたみ方から、最良のパターンを選択する.
- (3) 選択したパターンについて、折りたたみの条件式を満たすように、側面を構成する断面線の頂点位置を修正する.
- (4) 修正した断面線から立体形状を生成し、その立体の折りたたまれる様子をシミュレートする.
- (5) パネルに厚みを加える場合は、干渉を防ぐためにヒンジの形状を修正する.
- (6) 生成した折りたたみ可能な立体形状を組み合わせることで、より複雑な形状の折りたたみモデルを生成する.

次節からは折り紙工学に関連する、ステップ(1)の多面体モデルを生成するための入力方法、ステップ(2)の最良の折りたたみパターンを選択するための評価値の導入、ステップ(3)の折りたたみ可能な断面線の条件、条件を満たすための断面線の修正方法、ステップ(6)の複数の立体形状を組み合わせたモデルの生成方法の 5 つの事柄を中心に述べていく.

### 2.1. 天頂面と断面線の入力方法

天頂面の形状は、図 3 で示すように、ユーザが  $z = h$  の平面上に多角形を作図することで入力する. ここで、 $h$  は底面から天頂面までの高さであり、天頂面の頂点数を  $N$ 、各頂点を  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 0, \dots, N - 1$ )、頂点  $\mathbf{t}_i$  と  $\mathbf{t}_{i+1}$  を結ぶ辺を  $\mathbf{e}_i$  で表すものとする. また、2.2 節で示す折りたたみ可能な条件によって、折りたたみ時には側面が外側に広がるため、側面同士の干渉を防ぐために天頂面は凸形状であるものとする.

論文名 Title	折りたたみ可能な切開辺を含む 立体形状の設計	A method for designing flat-foldable 3D polygonal models
著者 Author(s)	加瀬悠人, 金森由博, 三谷純	Yuto Kase, Yoshihiro Kanamori, Jun Mitani
受理年月日 Date of acceptance	2016/3/31	
掲載 First publish	『折り紙の科学』 (“Science of Origami”) 2016/3/31 Vol. 5 No. 1 page 4-16	
備考 Note		

日本折紙学会  
Japan Origami Academic Society  
[www.origami.jp](http://www.origami.jp)

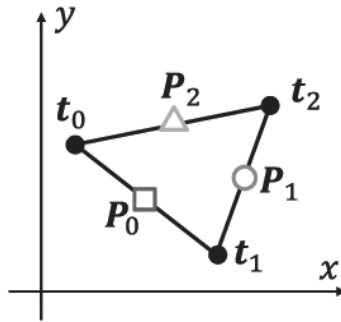


図 3 入力した凸多角形の天頂面.

側面形状を定義する断面線は、天頂面を構成する辺の数だけ定義される。それぞれの断面線は、図 4 で示すように、天頂面の各辺 $e_i$ に垂直な $u, v$ 平面上の折れ線としてユーザが指定する。また折れ線を構成する線分の数は任意である。ただし、天頂面と底面を水平にするために、各立体形状のすべての断面線の始点は $(0, h)$ 、終点は $v = 0$ に固定されているものとする。側面は、図 5 で示すように、この断面線 ( $u, v$ 平面) を辺 $e_i$ に平行な方向に掃引することで生成される。平行な方向への掃引であるため、この側面 (3 次元空間に存在する平面多角形) の折りたたみに関する問題は、断面線 (2 次元空間に存在する 1 次元の折れ線) の折りたたみ問題に帰着できる。掃引処理は無限遠方まで行い、後から交差する位置でのトリム処理を行うことで閉じた初期多面体を構築する。この過程で底面は一意に定まる。

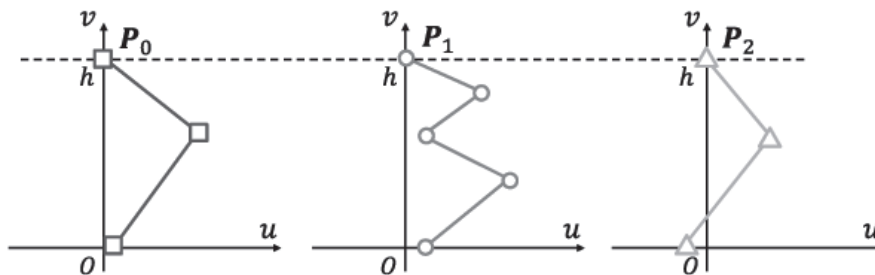


図 4 側面を構成する断面線.

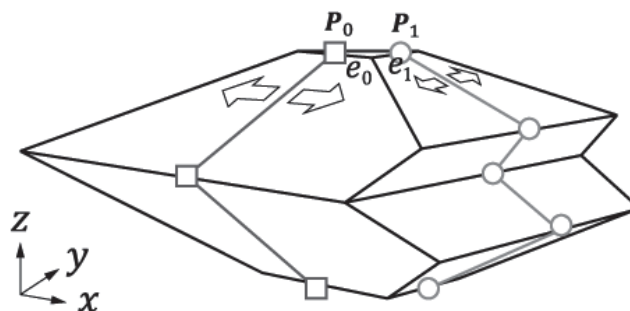


図 5 天頂面 (図 3) と断面線 (図 4) から生成される多面体モデル。各断面線を矢印方向に掃引する。

## 2.2. 折りたたみ可能な断面線の条件

入力として与えられた断面線は天頂面の辺の数だけ存在するが、各断面線を折りたたみ可能なように修正する処理は、個々の断面線に対して独立に行う。図 6 に示すように、いま注目する断面線の  $u, v$  平面上において構成する頂点数を  $M$  とし、天頂面の边上にある断面線の始点を  $Q_0$ 、底面の边上にある終点を  $Q_{M-1}$  とする。また、各断面線の  $Q_i$  と  $Q_{i+1}$  を結ぶ辺  $E_i$  の長さを  $l_i$  ( $i = 0, \dots, M-2$ ) と表す。断面線の折りたたみは、すべての辺を、隣接する辺との連続性を保ちながら水平に配置することで達成される。折りたたみの際、図 7 で示すように、各頂点位置での折れ角は 0 度または 180 度のどちらかを取るため、折りたたみ後の側面の干渉を考慮しなければ折り方の場合の数は合計  $2^{M-1}$  通りある。しかし、対象とする立体の幾何的な制約から、各頂点は式(1)および式(2)を満たさなければならない。

$$u'_i \geq u_i \quad (1)$$

$$gap = (u_{M-1} - u_0) - \sum_i \delta_i l_i = 0 \quad (\delta_i \in \{-1, 1\}) \quad (2)$$

ここで、式(1)の  $u_i$  は折りたたみ前の頂点  $Q_i$  の  $u$  座標、 $u'_i$  は折りたたみ後の  $u$  座標である。式(1)がすべての頂点について満たされたならば、折りたたむ際に隣接する側面のパネルが干渉を起こさずに折りたたまれる。一方で式(1)を満たさない場合、図 8 で示すように、断面線が折りたたみ過程で折りたたみ前の頂点より内側に移動するため、隣接する側面パネルと干渉を起こしてしまう。式(2)の  $\delta_i$  は、折りたたみ後に辺  $E_i$  の法線が上を向いているときに 1 を、下を向いているときに -1 の値をとるものとする。

本手法では、折りたたまれる際に天頂面は面の法線方向に一直線に折りたたまれること（つまり始点  $Q_0$  が  $v$  軸上のみを移動すること）を想定している。この条件を満たすときのみ、折りたたみ前後の始点  $Q_0$  と終点  $Q_{M-1}$  の  $u$  座標の値が一致するため、上下方向に折りたたみ可能であることを意味する。しかし入力した断面線について、図 9 で示すように、実際にはすべての可能な折りたたみ方を調べても式(2)の  $gap = 0$  を満たすものが存在することは稀である。したがって、式(1)を満たす折りたたみ方の中から評価値を導入し最良の折りたたみ方を選択し、 $gap$  がゼロとなるように、最適化によって断面線の修正を行う。詳しくは、2.3 節と 2.4 節で述べる。

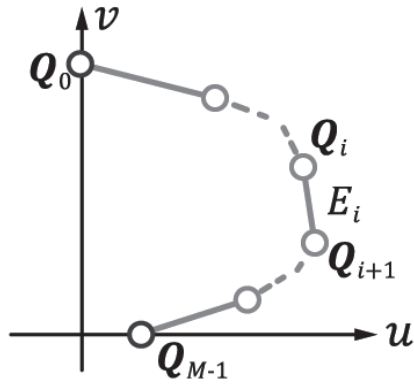


図 6 対象とする断面線の例.

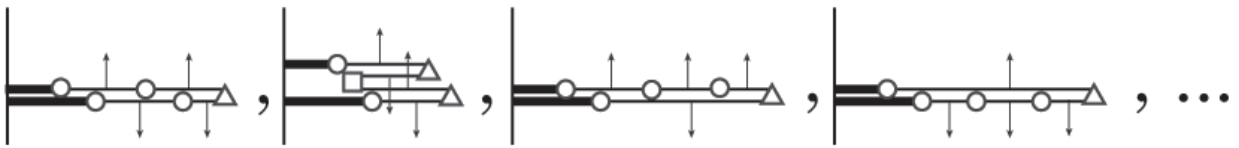


図 7 5つの頂点を入力した断面線の折りたたみ方の例.

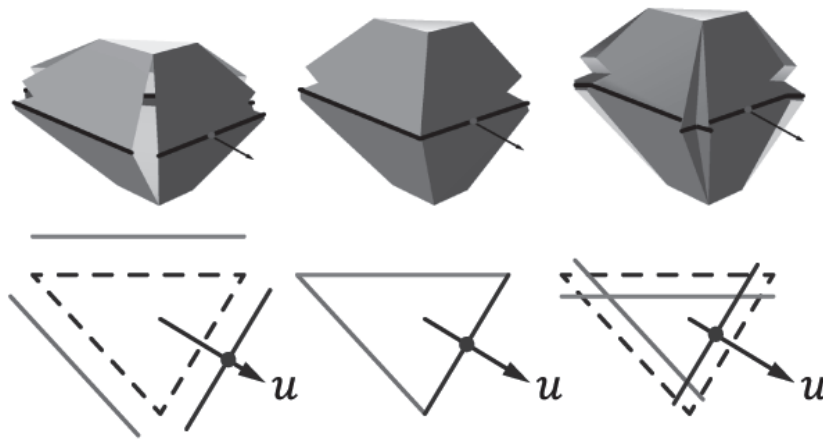


図 8 折りたたまれる際の干渉の例.

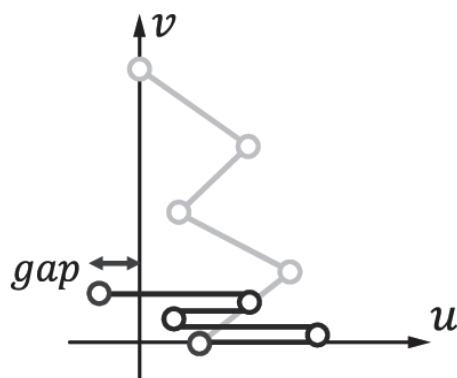


図 9 折りたたみ前後の始点の位置に *gap* が発生する例.



### 2.3. 評価値の導入

各断面線について、式(1)を満たす折りたたみ方の中から、最良の折りたたみ方に対し、式(2)の $gap$ がゼロとなるように辺の修正を行う。本手法では、「折りたたむ過程で面の向きやヒンジでの山・谷の変化少ない折りたたみ方」を上から下に自然に押しつぶすことができる折り方と定義し、折りたたみの前後で辺の向きの変化や折れ角の変化を小さく抑えることを目的とした評価値 $C_1$ 、 $C_2$ を導入する。また、後工程で条件式(2)を満たすように辺の長さを修正することになるため、この修正のための誤差を評価値 $C_3$ とした。各評価値は値が小さいものほど優れているとし、これらの評価値の重み付け線形和 $C_{total}$ が最小となるものを最良の折りたたみ方とする。

#### 2.3.1. 折りたたみ前後での各辺の向きの変化

多面体を上から下に押しつぶす過程で自然な形で折りたたまれる方法をできるだけ選択するように、多面体の各面の法線が折りたたみ前後で変化が小さいものを評価する評価値 $C_1$ を導入する。このため、折りたたみ前後で各辺 $E_i$ の法線の変化が小さいものほど評価値が小さくなるように、評価値 $C_1$ を式(3)のように定義する。

$$C_1 = - \sum_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}'_i \quad (3)$$

ここで、図 10 で示すように、 $\mathbf{n}_i$ 、 $\mathbf{n}'_i$ はそれぞれ各辺 $E_i$ の折りたたみ前と後の単位法線ベクトルである。この内積をとることにより 2 つのベクトルが成す角 $\theta$ に対する $\cos \theta$ の値が評価の指標となる。

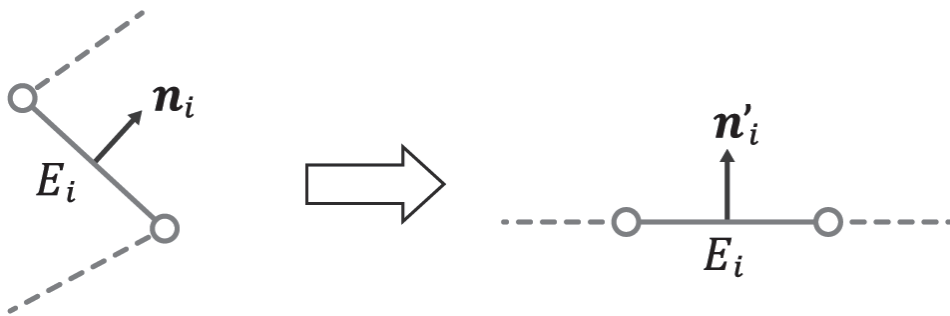


図 10 折りたたみ前後での各辺の向きの変化の例。

#### 2.3.2. 折りたたみ前後での折れの向き（山・谷）の変化

折りたたみの前後で、折りの山・谷が変化する場合も自然な形で折りたたむ妨げとなるため、この変化が小さいものを選択するための評価値 $C_2$ を式(4)のように定義する。

$$C_2 = - \sum_i (\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_{i+1}) \cdot (0, 0, \rho_i)^T \quad (4)$$

ここで、図 11 に示すように、 $\rho_i$ は折りたたみ後のヒンジ（頂点）がそれぞれ山折りの場合（成す角が 0 度）は 1，平坦の場合（成す角が 180 度）は 0，谷折りの場合（成す角が 360 度）は -1 をとるものとする。

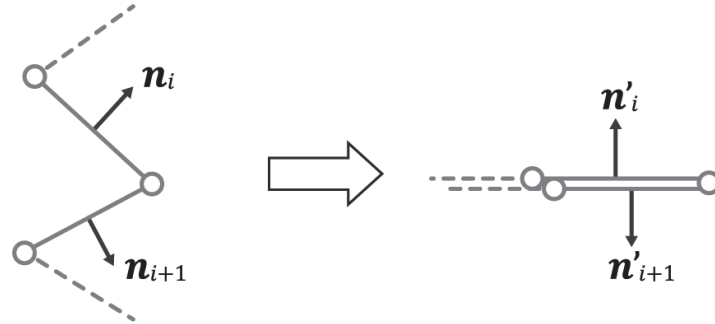


図 11 折りたたみ前後での折れの向き（山・谷）の変化の例．右図は、折りたたみ後に山折りとなるため、 $\rho_i = 1$ をとる．

### 2.3.3. 端点の位置の誤差

2.4 節で、条件式(2)を満たすように入力された断面線の修正を行うため、図 9 で示すような  $gap$  となるべくゼロに近い方が辺の長さの修正が小さくて済み、その際の断面線の形状変化を小さくすることができる．形状の変化が小さくて済むものを選択するように評価値  $C_3$  を式(5)のように定義する．

$$C_3 = \frac{|gap|}{\sum_i l_i} (M - 1) \quad (5)$$

ここで、 $C_3$ は候補となる折たたみ方で生じた  $gap$  を断面線における辺の平均の長さで割った値が評価の指標となる．

前項で述べた 3 つの評価値  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  に対する重み付け線形和によって、折りたたみ方（折れ線の頂点の折れ角の指定方法）の評価値  $C_{total}$  を式(6)のように定義する．

$$C_{total} = \omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 + \omega_3 C_3 \quad (6)$$

本手法では重み  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  についてすべて 1 とした．各断面線のすべての折りたたみ方について、この評価値  $C_{total}$  を算出し、その値が最も小さいものを最良の折りたたみ方とする．

## 2.4. 断面線の修正

各断面線について採用された最良の折りたたみ方に対し、 $gap$  の値がゼロになるように、入力として与えられた断面線の各辺  $E_i$  の長さ  $l_i$  と各頂点  $Q_i$  の位置を修正する．まず、 $gap$  をゼロとするために、各辺  $E_i$  の長さ  $l_i$  の値を一定の比率で変更しそれを目標値とする．目標値を  $l_i(1 + \delta_i gap / \sum_i l_i)$  とすることより、断面線全体で  $gap$  がゼロとなるようにする．次に、

定めた目標値 $l_i$ を用いてエネルギー関数 $E$ を式(7)のように定義し、図 12 で示すように、最急降下法によって最小となる時の頂点 $\hat{Q}_i$ の位置を求める。

$$\begin{aligned}
 E &= \omega_Q \sum_i \|\hat{Q}_i - Q_i\|^2 + \omega_l \sum_i \|\hat{l}_i - l_i\|^2 \\
 &= \omega_Q \sum_i \{(\hat{u}_i - u_i)^2 + (\hat{v}_i - v_i)^2\} + \omega_l \sum_i \left\{ \sqrt{(\hat{u}_i - \hat{u}_{i+1})^2 + (\hat{v}_i - \hat{v}_{i+1})^2} - l_i \right\}^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、 $\hat{Q}_i$ と $\hat{l}_i$ はそれぞれ修正される頂点と辺の長さである。式(7)の第一項は入力された断面線の頂点の位置をなるべく移動させないための項であり、第二項は $gap$ の値をゼロにする、つまり平坦に折りたたみ可能とするための項である。2つの項に対して、それぞれ $\omega_Q$ 、 $\omega_l$ によって重み付けする。断面線の修正の際には、折りたたみ可能とすることを優先するために、 $\omega_l$ の値を大きくする。本手法では $\omega_Q = 0.001$ 、 $\omega_l = 1$ を用い、 $gap$ が断面線の平均した辺の長さの 0.001 より小さく収束した場合は折りたたみ可能と判断し、収束しない場合は次に評価値の低い折りたたみ方を選択し断面線の修正を行った。

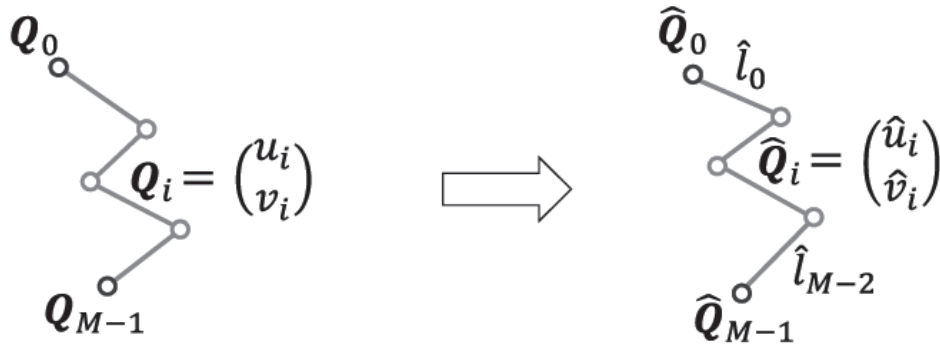


図 12 折りたたみ可能となるように修正される断面線。

## 2.5. 複数の立体形状を組み合わせたモデルの生成方法

本手法で対象とするモデルは、天頂面と底面の間で折れ線により側面が生成されるため、二股に分かれるような形状を 1 つの立体で生成することができない。そこで、図 13 の左図で示すように、複数の立体形状を面同士で接続することによってより形状の自由度を高める。しかし、任意の面同士で接続を行った場合、折りたたみ過程で接続した立体形状同士の側面が外側にせり出すことにより衝突し、折りたたみできない場合が生じる。

衝突を防ぐためには、接続したパーツ同士が折りたたみ後に上下に重なるように配置されればよい。そこで、各立体形状について折りたたみ後に天頂面側または底面側から見える面同士のみで接続することとする。ここで各パーツについて折りたたみ後に天頂面側か

ら見える面を天頂面と同一レイヤー上にある面と呼ぶこととし、これらの面は、図 13 の右図の三角形の頂点で示すように、折りたたみ後に断面線の始点（天頂面上の頂点）から辿って行き初めて山折りとなる（平坦ではない）頂点までの辺で構成される面で定義される。同様に底面側から見える面を底面と同一レイヤー上にある面と呼び、これらの面は断面線の終点（底面上の頂点）から辿って行き初めて山折りとなる頂点までの辺で構成される面で定義される。この定義された天頂面または底面と同一レイヤー上にある面のみでパーツ間の接続を行うこととする。この方法により、隣接する立体形状同士の衝突を防ぐことができる。

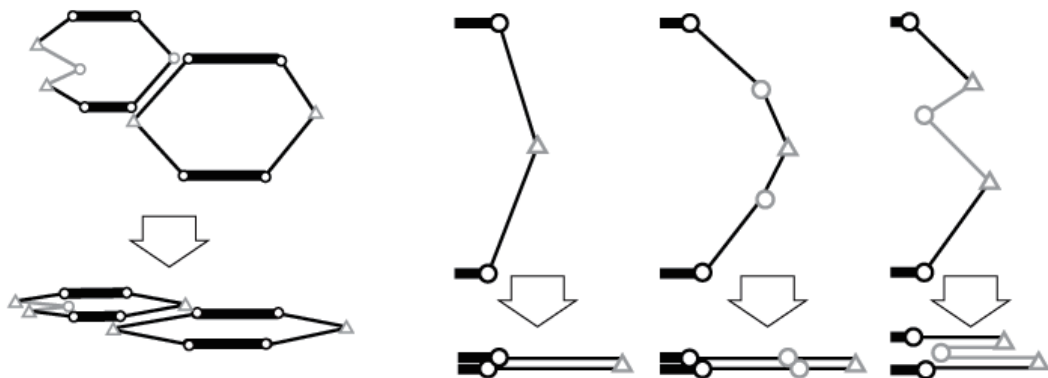


図 13 隣接する立体形状が衝突しないための条件. 太線は天頂面または底面, 実線は天頂面または底面と同一レイヤー上にある面, 灰色の線は同一レイヤー上にない面である.

### 3. 結果と考察

本手法により生成された多面体の 3D モデルデータについて、2D の展開図に変換するソフトのペパクラデザイナー[9]を用いて展開図を生成した。生成した展開図について本手法の有用性を確かめるために、厚みの無視できる紙や厚みのある素材で試作を行った。

#### 3.1. 折りたたみ可能な立体モデル

図 14 の上図は 4 つの断面線を基に生成された折りたたみ可能な立体モデル（スフィンクス）の試作例であり、平坦に折りたたまれることを確認した。図 14 の下図は展開図であり、括弧の中は左の文字が各辺における折りたたみ前の山・谷の割り当てであり、右の文字が折りたたみ後の山・谷・平坦の割り当てである。ここで M, V, F はそれぞれ山, 谷, 平坦を表す。例えば, (M,V) の辺は折りたたみ前が山であり, 折りたたみ後が谷で折りたたまれることを意味する。

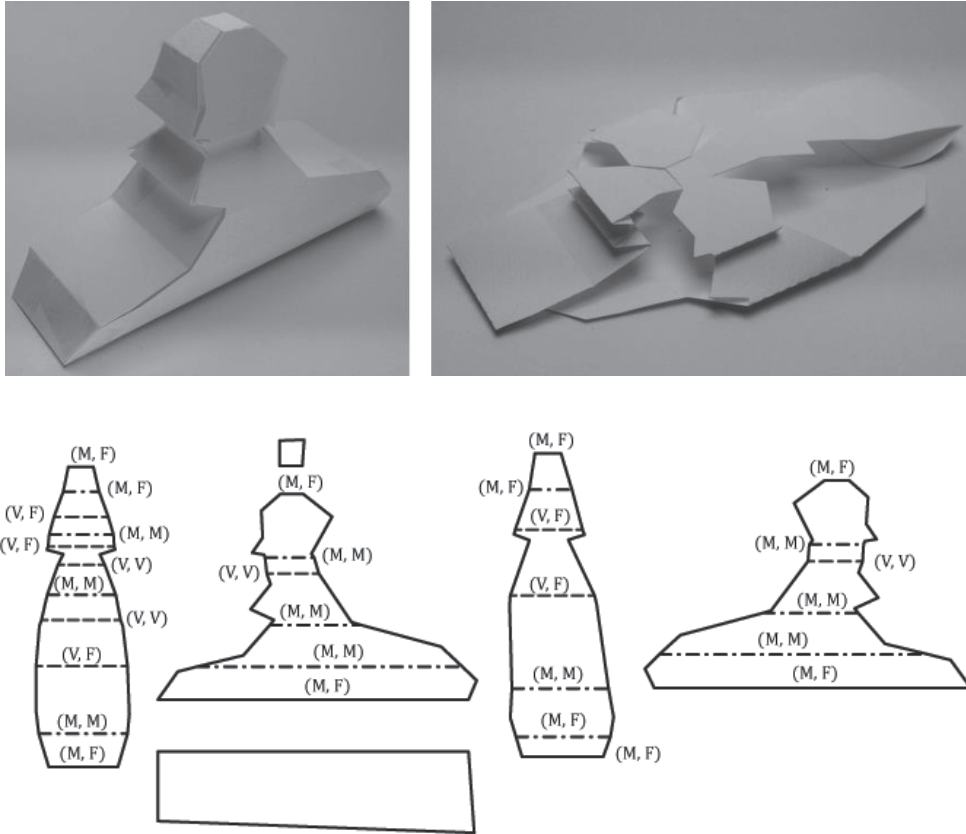
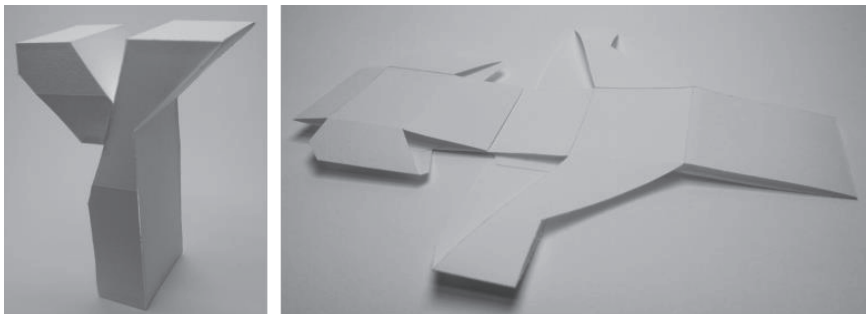


図 14 紙により試作したスフィンクスの例.

### 3.2. 複数の折りたたみ可能な立体モデルを組み合わせたモデル

生成した立体形状では二股に分かれるような形状を表現することができなかった．そこで複数の立体形状を組み合わせるにより，より複雑な形状の Y の字（図 15 の上図）やスタンフォード・バニー（図 2），ユタ・ティーポット（図 15 の下図）のモデルを試作した．これらのモデルのように複数のモデルを組み合わせた場合についても，組み合わせた立体形状同士が衝突せずに平坦に折りたたまれることを確認した．



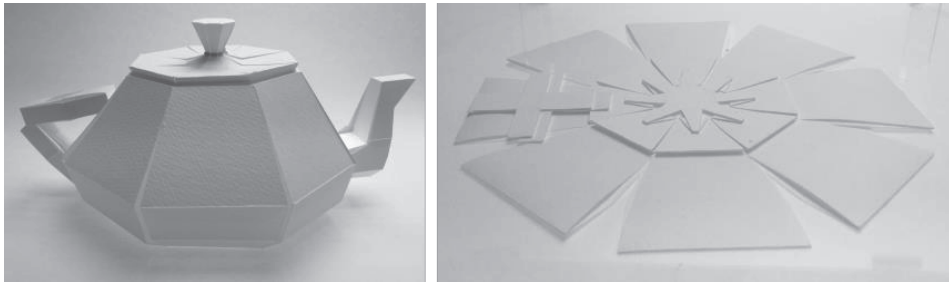


図 15 紙により試作した複数の立体を組み合わせたモデルの例.

### 3.3. 厚みのある折りたたみ可能な立体モデル

本手法により生成された多面体の 3D モデルデータについて、図 16 に示すように、各面に均等に厚みを加え、1 つの軸によるヒンジ（上図）と 2 つの軸によるヒンジ（下図）を用いて試作を行った。これらのモデルのように各面に厚みを加えた場合についても、折りたたまれることを確認した。

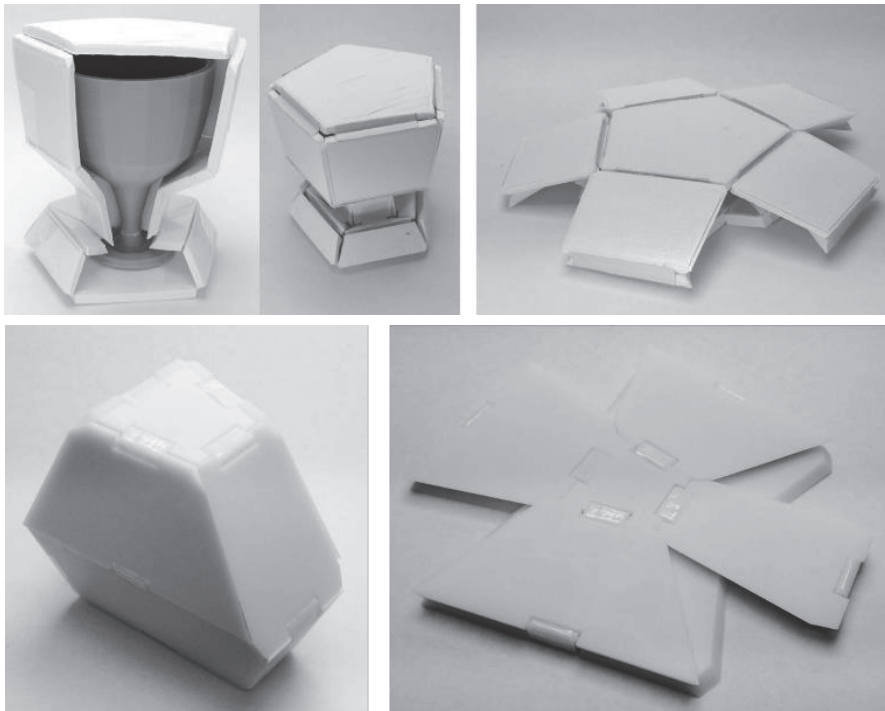


図 16 3D プリンターにより試作した厚みを加えたモデルの例.

## 4. まとめ

本研究では、折りたたみと展開が可能な切開辺を含む立体形状の設計を支援する手法を提案し、アプリケーションの出力結果から実際に折りたたみ可能な立体形状を作成した。本手法では、立体形状の天頂面と底面および断面を構成する折れ線を入力することにより、



多面体を生成した。生成した多面体は側面を構成する断面線を修正することにより、折りたたみ可能な立体形状とすることができた。また、複数の立体形状を組み合わせることにより、より複雑な形状の折りたたみを可能とした。

今後の課題としては、下記の 2 つの事柄が挙げられる。1 つ目に、元の立体形状に戻した際の切開された辺について、元の状態に戻した際の固定方法の検討することが挙げられる。本手法では磁石やテープ等を用いた固定を行っていたが、しっかりと固定することができなかった。2 つ目に、入力方法の改善をすることが挙げられる。本手法のアプリケーションではスクリーン上でクリックすることにより天頂面の形状と側面を構成する断面線を入力し多面体が生成される。このためユーザは二次元の入力から三次元のモデルの形状を予想しなければならず、意図した形状にならない場合があった。また、天頂面の数が増えるとその断面線の形状を入力しなければならずユーザの負担が大きくなってしまうことも挙げられる。そこで、参照する 3D モデルを入力として、自動で天頂面と断面線を生成し折りたたみ可能な形状に修正されるような手法の検討をする必要があると考えられる。

#### 文献

- [1] Cauchy A. L. Sur les polygones et le polyheders. *XVIe Cahier IX*, 1813, pp. 87-89.
- [2] Connelly R., Sabitov I. and Walz A. The Bellows Conjecture. *Contributions to Algebra and Geometry* 38, 1, pp. 1-10, 1997.
- [3] Jun Mitani and Hiromasa Suzuki. Computer aided design for Origamic Architecture models with polygonal representation. *Trans. of Inf. Process. Soc. of Japan* 44, 5, pp. 1372-1379, 2003.
- [4] Sosuke Okamura and Takeo Igarashi. An Interface for Assisting the Design and Production of Pop-Up Card. *Lecture Notes in Computer Science* 5531, 2, pp. 68-78, 2009.
- [5] Satoshi Iizuka, Yuki Endo, Jun Mitani, Yoshihiro Kanamori and Yukio Fukui. An interactive design system for pop-up cards with a physical simulation. *Vis. Comput.* 27, 6-8, pp. 605-612, 2011.
- [6] Conrado R. Ruiz Jr., Sang N. Le, Jinze and Yu Kok-Lim Low. Multi-style Paper Pop-up Designs from 3D Models. *EUROGRAPHICS 2014*, 33, 2014.
- [7] Robert J. Lang. Airbag Folding.  
<http://www.langorigami.com/science/technology/airbag/airbag.php>, (Jan. 12, 2016).
- [8] ミウラ折りラボミウラ折り公式サイト. <http://www.miuraori.biz>, (Jan. 12, 2016).
- [9] 多摩ソフトウェア有限会社. ペパクラデザイナー.  
<http://www.tamasoft.co.jp/pepakura/>, (Jan. 12, 2016).