論文名 Title	神谷パターン及びその亜種の展開図を骨格により描画する方法	The Method of Drawing Crease Pattern of Kamiya Pattern and Its Variety by Skeleton
著者 Author(s)	村上友哉	Yuya Murakami
受理年月日 Date of acceptance	2017/07/10	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2017/07/31 Vol. 6 No. 1 page 22-30	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

神谷パターン及びその亜種の展開図を骨格により描画する方法

村上友哉
東北大学理学部数学科
〒981-1101 宮城県仙台市太白区四郎丸字吹上 76-2
imaiburngermany@outlook.jp

The Method of Drawing Crease Pattern of Kamiya Pattern and Its Variety by Skeleton

Yuya Murakami
Tohoku University, Department of Mathematics, Faculty of Science
981-1101, Hukiage 76-2, Siroumaru, Taihaku-ku, Sendai-shi, Miyagi, Japan

要約：折り紙愛好家の間で「神谷パターン」(図 1) と呼ばれるピタゴラス三角形を折り畳んだ折り線のパターンや，その亜種が知られている．著者はその展開図を見通し良く描く方法を発見した．この方法を著者は「骨格による方法」と呼んでいる．本稿では骨格により展開図を描く方法を述べる．

Abstract: Some origami fans are familiar with the patterns of lines called “Kamiya pattern” that is obtained by folding Pythagorean triangle and its variety. The author discoverd the way of drawing these crease pattern efficiently. The author calls this way “the way of skeleton.” In this article, we state the way of drawing crease pattern by skeleton.

1　はじめに

本稿では紙を平坦に折り畳んだ時に折り線で山谷の区別をしないものについて議論する．

本稿の目的は神谷パターンと呼ばれる折り線のパターンやその亜種の山谷なしの展開図を描く方法を「骨格」という概念の導入により与えることである．

この章では神谷パターンの説明と歴史の要約を与える．

45 度の線を基調とした折り線を展開図上の正方形のグリッドに沿って配置する折り紙の技法は蛇腹 (box pleats) と呼ばれる．蛇腹は折り上がりの形を自在にコントロールできる強力な技術で，昆虫や人物などを折り紙で造形するのに有効である．一方で蛇腹は，紙の効率が悪くなりやすく，時に展開図がありきたりで面白みのないものになってしまうというデメリット

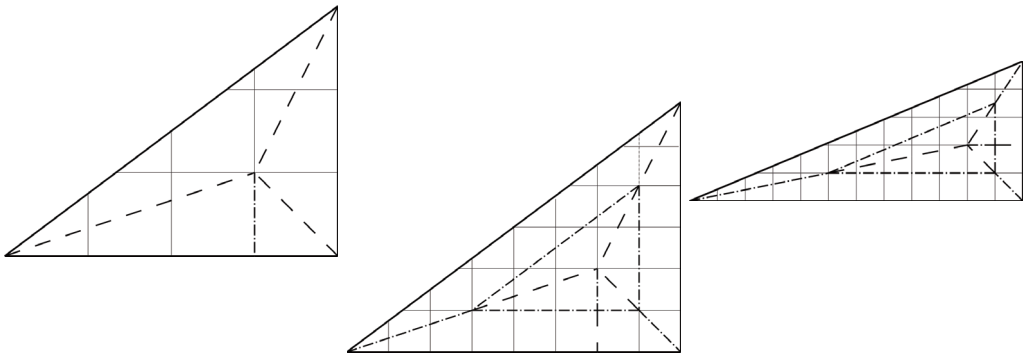


図 1: 神谷パターン

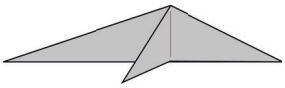


図 2: 図 1 左の展開図を折り畳んだもの

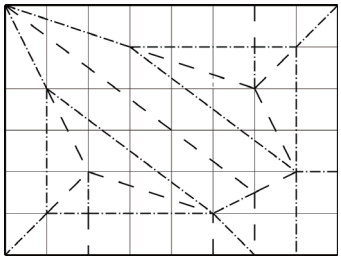


図 3: 神谷パターンの切断

があった．神谷パターンはそれらのデメリットを打ち消す画期的な構造である．神谷パターンにより，「蛇腹系[*1]」において紙の使用効率が良い折り紙作品を作ることができるようになり，また展開図に意外性や数理パズル的な面白さを込めることができるようになった．

神谷パターンは折り紙作家の神谷哲史氏により 1997 年に発見され (`http://www.folders.jp/g/1997/9740.html`)，2000 年頃から氏による折り紙作品への応用が積極的になされていった（2017 年 3 月の神谷氏と筆者との私信より）．その後，目黒俊幸氏の掲示板で「神谷パターン」という名称が定着した (`http://origami.gr.jp/~komatsu/etc/meguro-bbs-log/2003-03-21.html`)．目黒俊幸氏は折り線の角度を変化させたときにどのような神谷パターンが存在するかについての研究を自身の掲示板で発表している (`http://origami.gr.jp/~komatsu/etc/meguro-bbs-log/2003-03-23.html`)．

2013 年頃から，今井幸太氏により神谷パターンの様々な亜種 (例えば神谷パターンの切断 (図 3) が発見された．これらは神谷パターンよりも自由度が高く，蛇腹系折り紙に神谷パターンを超えた可能性を与えた．今井幸太氏は自身が発見した多様な神谷パターンの亜種を自身の創作折り紙に応用し，沢山の棘がある昆虫などを大変エレガントに折り上げている ([3], [4])．

[*1] ここでいう「蛇腹系」という用語は，展開図上の正方形のグリッドに沿って 45 度の折り線を配置したプレーンな「蛇腹」ではなく，45 度の折り線に加えて神谷パターンなどの構造を含めることも許した角度系を指している．これは折り紙創作家の間では一般的な用法である．

2 準備

この章では折り線の角度・傾きの定義を述べ，展開図の局所平坦折り畳み条件について簡単にまとめる．

定義 2.1. 展開図とは，折られた紙を広げた時に付いている折り筋を表した図のことである．本稿では山谷を無視したものを考える．

展開図上の頂点とは，異なる 2 つの折り線と折り線の交点のことである．従って，他の折り線との交点になっていない折り線上の点は頂点とは呼ばない．

定義 2.2 (折り線の角度・傾き)**.** 展開図上の基準線 (例えば水平線) を 1 つ固定する．展開図上の折り線と基準線とのなす角で，正の向きに取ったもののうち 0 以上 π 未満のものを，その折り線の角度と呼ぶ．折り線の角度は $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ の元とみなす．角度が θ の折り線の傾きを $\tan\theta$ と定義する．便宜上，角度が $\frac{\pi}{2}$ の折り線の傾きを ∞ と定義し，$0^{-1} = \infty$ と書くことにする．

注意 2.3. 図 4 のように，基準線からの折り線の角度を π だけずらして測ることもできるため，折り線の角度を $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ の元とみなした．

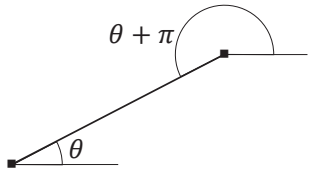


図 4: 折り線の角度の定義

定義 2.4 (単頂点折り目パターン)**.** 展開図において，1 つの頂点から放射状に折り線が延びているパターンを単頂点折り目パターンと呼ぶ[*2]．

3 基本的な概念

今後の議論において基本的な概念をいくつか定義する．

定義 3.1. (角度系) $U \subset \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ を折り線の角度を元とする集合とする．複素平面上に与えられた 2 点に対し，それらの点を通り角度が U の元となる 2 直線の交点を得る操作を考える．0 と 1 から始めて，再帰的にこの操作を繰り返すことで得られる複素平面上の点全体を $R(U) \subset \mathbb{C}$ とおく (図 5 は 0 と 1 から角度が $\theta, \psi \in U$ の 2 直線を引いて交点を得た図)．この

[*2] この用語は [1] から引用した．

定義は [2] による．

複素平面に埋め込まれた折り紙の展開図が U-角度系であるとは，展開図上の各頂点が $R(U)$ の元で，展開図上の各折り線の角度が U の元であることを言う．これは本論文のみの用語である．

$U = \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}\ \ \pi\mathbb{Z}$ の時，U-角度系のことを慣習的に $\frac{180}{n}$ 度系と呼ぶ．45 度系の展開図は正方形のグリッド上に描くことができる．22.5 度系の展開図の典型的な例として，鶴の基本形がある (図 6)．

$U = \ \ \theta + n\pi\ \ 2 \bmod \pi\mathbb{Z}\ \ \ \theta = 0\quad\ \arctan\frac{1}{2}\quad\ \arctan\frac{1}{3}\quad\ \arctan\frac{3}{4}\quad\ \arctan\frac{1}{7}\ n \in \mathbb{Z}$ の時の U-角度系のことを 3:4:5 神谷パターン系と呼ぶことにする．これは本論文のみの用語である[*3]．この場合も展開図は正方形のグリッド上に描くことができる．この角度系は 3:4:5 の神谷パターンやその亜種を含む．

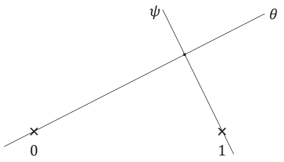


図 5: $R(U)$ を構成する最初のステップ

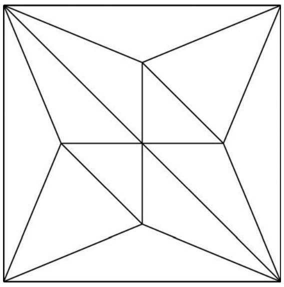


図 6: 鶴の基本形の展開図

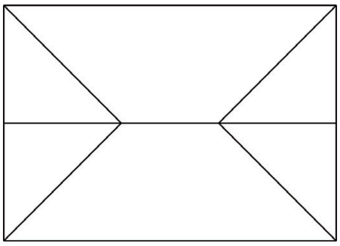


図 7: 45 度系ではないが 22.5 度系である例

注意 3.2. ここでの角度系の定義はこの論文が初出だと思われる．この定義の良い所は角度の集合 U のみから U-角度系を定義しているところである．「展開図が U-角度系であること」の定義は，「展開図上の各折り線の角度が U の元であること」ではなく「展開図上の各頂点が $R(U)$ の元で，展開図上の各折り線の角度が U の元であること」である．この定義は一見，角度の集合だけでなく頂点の集合にもよっているように思われるが，本論文では頂点の集合を角度の集合 U から $R(U)$ として与えることで，U-角度系を U のみから定義した．

この定義によると，例えば図 7 の展開図は 45 度系ではないが 22.5 度系ではある．ここで，図 7 の展開図は縦横比が $1 : \sqrt{2}$ の長方形に 45 度の折り線を付けたものである．この展開図に現れる折り線の角度は 45 度の倍数角だが，展開図を複素平面にどのように埋め込んでも頂点が $R(\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\ \ \pi\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}\ \ \frac{1}{2}]$ の元でないので，本論文の定義では 45 度系とはみなされない．一方，$R(\frac{\pi}{8}\mathbb{Z}\ \ \pi\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \sqrt{-1}]$ ([2]) なので，この展開図は 22.5 度系である．

[*3] 著者はこれまでこの角度系を整数比角度系と呼んできた．「整数比角度系」という語は著者が 2014 年に持ち出したもので，一部の折り紙愛好家の中では定着しつつある．しかしながら，「整数比角度」という語には格子点系の角度のうち特別なものに制限したものであるというニュアンスがないため不適切な語であると思われる．本論文では整数比角度系という語を用いないことにした．

注意 3.3. ここでの角度系の定義は用紙形に言及していないが，例えば正方形の用紙を使うことを考える時は，複素平面内に適当に埋め込んだ正方形 (例えば $a + b\sqrt{-1}$ $0 \leq a$ $b \leq 1$) について考えることにする．今後提示する例はいずれも用紙形が長方形だが，複素平面内に適当に埋め込んだ長方形を考えているとする．

3:4:5 神谷パターン系に現れる角度について，次が成り立つ．

命題 3.4.

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \qquad 2\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{4}{3} \qquad 2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$$

$$\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

証明. tan の加法定理より． □

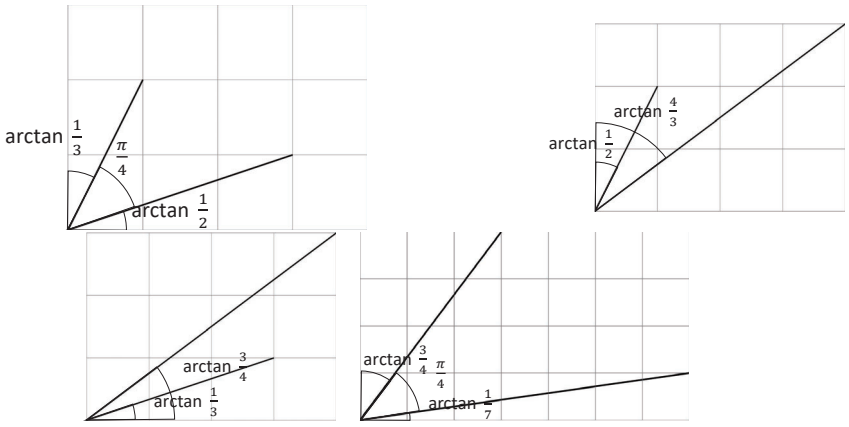


図 8: 命題 3.4

命題 3.4 から，神谷パターンの各頂点が局所平坦折り畳み条件を満たし，更に全体が平坦折り可能であることが確かめられ，また一値分子であることを確認できる (図 9).

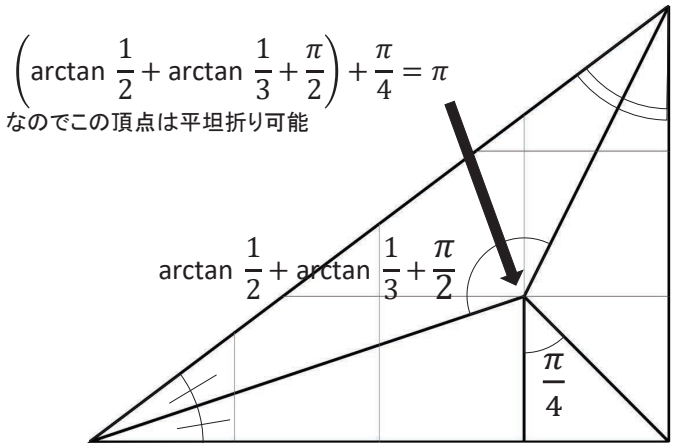


図 9: 神谷パターンが一値分子であること

また命題 3.4 から，3:4:5 神谷パターン系を定義する角度の集合 U について次が分かる．

$$\begin{aligned} U = & \ \theta + n\pi \ \ 2 \bmod \pi\mathbb{Z} \ \ \theta = 0 \quad \arctan\frac{1}{2} \quad \arctan\frac{1}{3} \quad \arctan\frac{3}{4} \quad \arctan\frac{1}{7} \ \ n \in \mathbb{Z} \\ = & \ \theta + n\pi \ \ 4 \bmod \pi\mathbb{Z} \ \ \theta = 0 \quad \arctan\frac{1}{2} \quad 2\arctan\frac{1}{2} \ \ n \in \mathbb{Z} \\ = & \ (-2\alpha + U') \cup (-\alpha + U') \cup U' \cup (\alpha + U') \cup (2\alpha + U') \end{aligned}$$

ただしここで，$\alpha = \arctan\frac{1}{2}$ $U' = \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ $\pi\mathbb{Z}$.

$U = (-2\alpha + U') \cup (-\alpha + U') \cup U' \cup (\alpha + U') \cup (2\alpha + U')$ という形から，3:4:5 神谷パターン系を定義する角度の集合 U は加法について簡明な集合になっていて，局所平坦折り畳み条件を満たす頂点が豊富に取れることが分かる．これは 3:4:5 神谷パターン系に平坦折り可能な展開図が豊富にあることの 1 つの根拠になっている．

3:4:5 神谷パターン系で骨格による方法が利用できる理由を説明するには，U が更にどのような性質を持つかを議論する必要がある．これについては今後発表する予定の骨格の一般論の論文で説明する予定である．

4　3:4:5 神谷パターン系における骨格

この章では 3:4:5 神谷パターン系における骨格を定義し，それによって 3:4:5 神谷パターン系の展開図を描く方法を論ずる．

3:4:5 神谷パターン系の展開図を描くのに最も実直な方法は，上で示した単頂点折り目パターンを 1 個ずつ組み合わせていく方法である．だが，この方法では折り線同士がうまく格子点でかみ合わず，試行錯誤が必要になる場面がよく起こる．

以下で説明する骨格による方法は，それよりも手間の少ない方法である．

定義 4.1. 傾きが $2^{\ 1}\ 3^{\ 1}$ の折り線のみで囲まれた多角形のことを 3:4:5 神谷パターン系における骨格と呼ぶ．ただし用紙の辺により途切れたものも「囲まれた」とみなすことにする．

骨格の具体例を挙げる．図 1，3 でそれぞれ提示した神谷パターンと神谷パターンの切断における「3:4:5 神谷パターン系における骨格」をそれぞれ図 10，11 で示した．図 10，11 において，太線が骨格を表している．

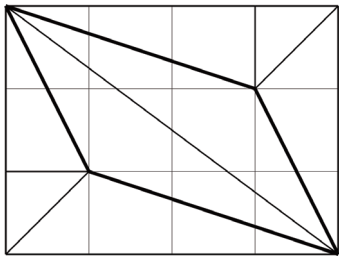


図 10: 神谷パターンの骨格

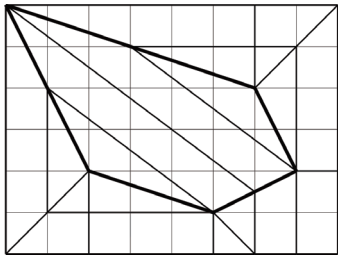


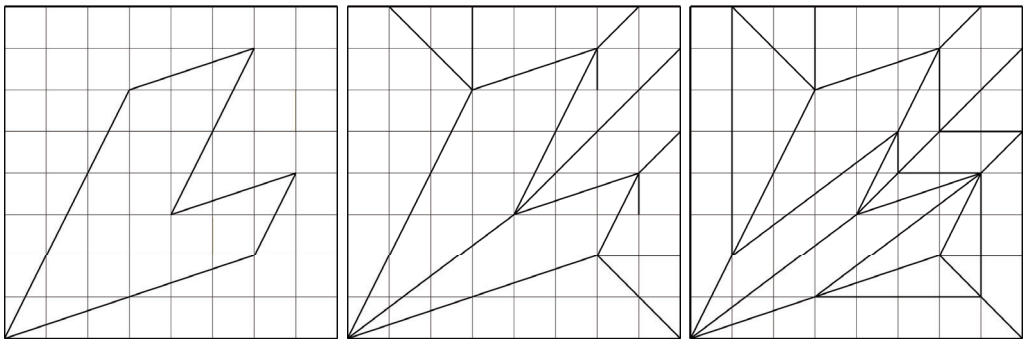
図 11: 神谷パターンの切断の骨格

骨格による 3:4:5 神谷パターン系の展開図を描く方法は次のステップを踏むことで行われる：

1. 3:4:5 神谷パターン系における骨格を描く．
2. 骨格の各頂点を，傾き $0\ ^{1}\ 1\ ^{1}\ \left(\frac{3}{4}\ ^{1}\right)\ 7\ ^{1}$ の折り線を加えて局所平坦折り畳み条件を満たすようにする．
3. 傾き $0\ ^{1}\ 1\ ^{1}\ \left(\frac{3}{4}\ ^{1}\right)\ 7\ ^{1}$ の折り線を更に加えて展開図全体の全ての点が局所平坦折り畳み条件を満たすようにする．

実際に折り紙のデザインに応用する場合には，3:4:5 神谷パターン系の構造を蛇腹系の展開図に埋め込む場合がほとんどなので，この論文では蛇腹系の展開図に埋め込めるような構造だけを例示することにする．

図 12 は骨格による方法を用いて 3:4:5 神谷パターン系の展開図を描いた例である．



(a) ステップ 1　(b) ステップ 2　(c) ステップ 3

図 12: 骨格による 3:4:5 神谷パターン系の展開図の描画

図 12 ではステップ 1 で描く骨格を内角が $\frac{\pi}{4}$ の倍数角になるようにとっている．こうするこ

とで，ステップ 2 で 45 度系の折り線と傾き $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$ 7 ^{1} の折り線を加える時に骨格の各頂点が局所平坦折り畳み条件を満たすようにするのがやりやすくなる．このような事情から，骨格に対し正則性という性質を次で定義する．

定義 4.2. 3:4:5 神谷パターン系での骨格の頂点が正則であるとは，その頂点の内角が $\frac{\pi}{4}$ の倍数角であることを言う．

骨格が正則な 3:4:5 神谷パターン系の展開図の具体例を図 13 に示す．太線が骨格を表す．

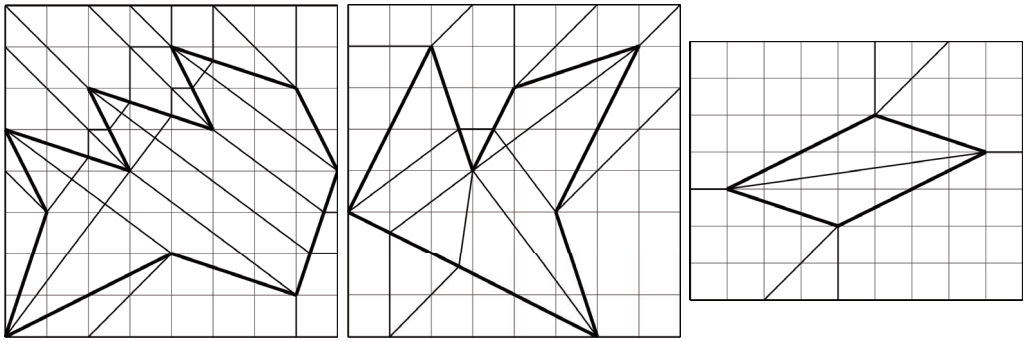


図 13: 骨格が正則な 3:4:5 神谷パターン系の展開図

骨格が正則でない場合には，骨格の外側に蛇腹系の折り線，内側に傾きが $\frac{3}{4}$，7 の折り線を配置して局所平坦折り畳み条件を満たすようにすることはできないが，一部の場合には内側に角度が $\frac{\pi}{4}$ の倍数角の折り線も描き入れることで，外側に蛇腹系の折り線が延びるように局所平坦折り畳み条件を満たさせることができる．しかし，骨格が正則でない場合にはどのようにしても外側に蛇腹系の折り線が延びるように局所平坦折り畳み条件を満たさせることができないこともある．骨格が正則でない場合は，閉曲線を描くのと並行して頂点が局所平坦折り畳み条件を満たすようにしていくと効率が良い．

骨格が正則でない 3:4:5 神谷パターン系の展開図の具体例を図 14 に示す．太線が骨格を表す．

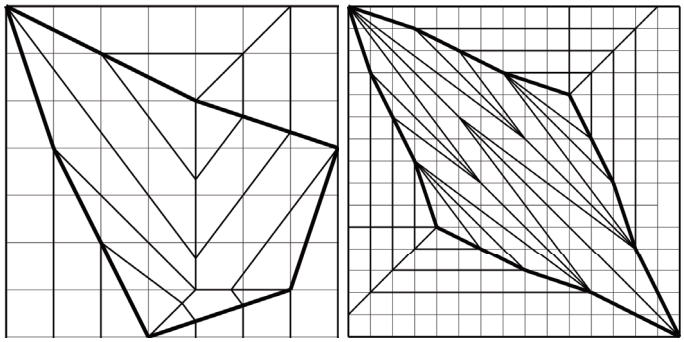


図 14: 骨格が正則でない 3:4:5 神谷パターン系の展開図

5　まとめと課題

本論文では，3:4:5 神谷パターン系における展開図を描く方法として骨格によるものを展開した．その例として，3:4:5 神谷パターン系の展開図の具体例を提示した．

骨格による方法は 3:4:5 神谷パターン系だけに留まらず，特定の性質をもつ角度系の場合に一般化される．それについては別論文で発表する予定である．

参考文献

[1] T. Hull, *Origami3 : Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. A.K. Peters, 2001. (邦訳：『折り紙の数理と科学』 川崎敏和訳，森北出版，2005．)

[2] Joe Buhler, Steve Butler, Warwick de Launey and Ron Graham, Origami rings, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **92**(3), 2012, 299–311.

[3] 今井幸太，本人の flickr1 `https://www.flickr.com/photos/o-ri-ga-mi/` (2017/5/6 アクセス)

[4] 今井幸太，本人の flickr2 `https://www.flickr.com/photos/119910244@N05/` (2017/5/6 アクセス)

[5] 小松英夫,「ようこそ折り紙のホームページへ　掲示板過去ログまとめ」`http://origami.gr.jp/~komatsu/etc/meguro-bbs-log/index.html` (2017/5/6 アクセス)

[6] 目黒俊幸，「ようこそ，折紙のホームページへ　2008 年 8 月 27 日から 2016 年 6 月 12 日までの掲示板」`http://www.geocities.co.jp/HeartLand-Oak/5487/keijiban_20080827_20160612/a.html` (2017/5/6 アクセス)