

| | | |
|-----------------------------|---|---|
| 論文名 Title | 平織りによるドット絵の表現 | Reproduction of pixel graphics by tessellation |
| 著者 Author(s) | 山本陽平,三谷純 | Yohei Yamamoto, Jun Mitani |
| 受理年月日 Date of acceptance | 2017/07/05 | |
| 掲載 First publish | 『折り紙の科学』 (“Science of Origami”) 2017/07/31 Vol. 6 No. 1 page 12-21 | |
| 備考 Note | | |

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

平織りによるドット絵の表現

山本陽平† 三谷純‡

†株式会社 技研製作所

781-5195,高知県高知市布師田 3948-1

yohey_yamamort@gmail.com

‡筑波大学

305-8573,茨城県つくば市天王台 1-1-1

mitani@cs.tsukuba.ac.jp

Reproduction of pixel graphics by tessellation

Yohei Yamamoto †, Jun Mitani ‡

† 3948-1 Nunoshida, Kochi, Kochi 781-5195, JAPAN

‡ 1-1-1 Tennoudai, Tsukuba, Ibaraki 305-8573, JAPAN

要約 平織り (Tessellation) と呼ばれる折り紙の造形手法では, 多角形を基本とした構造を平面に敷き詰めるように折り, 幾何学的なタイリングのパターンを作り出す. 本研究では, 正方格子の各マス目に黒または白を割り当てて形や模様を表現する「ドット絵」を, 平織りを構成する紙の層の重なりで表現する手法を提案する. まず, 任意のドットの並びを表現するために必要な展開図の基本構造は 11 種類であることを示し, それぞれに対応した展開図要素を設計する. そして, 展開図要素を連結することで, 任意のドット絵を再現する展開図を生成できることを示す. 得られた展開図を実際の紙で折って平織りを制作し, ドット絵を視認できることを確認した.

キーワード: 折り紙, 平織り, ドット絵

Abstract: In the origami tessellation, geometric tiling patterns are generated by folding crease patterns consist of the polygonal-based structures. We propose a method to express binary "pixel art" on the square grid pattern by the overlapping layers of origami tessellation. First, we show that there are eleven types of basic structures of crease patterns necessary to express arbitrary pixel arrangement, and propose the patterns corresponding to each. Then, we show that a crease pattern that produces any pixel art is able to be created by connecting them. By folding a sheet of paper, we confirmed that we can create origami tessellation where the pixel art appears.

Keyword: origami tessellation, pixel art

1. はじめに

紙を折ることで生まれる幾何学的な造形を楽しむ分野の 1 つに平織り (Tessellation) と呼ばれるものがある. 平織りの作品は, ねじり折りをはじめとする単純な基本構造を敷き詰めて作り出される. ねじり折りを基本とする平織りの展開図は, 特定の条件を満たす

平面充填タイリングパターンを用意し、それぞれの多角形を「縮小して回転させる」という操作によって作成できることが知られている[1] (図 1). この方法をソフトウェアとしてコンピュータ上に実装することで、新しい平織りの展開図を容易に作成できる. 例えば, Beteman によって Tess という名のソフトウェアが公開されている[2]. 2011 年には Lang と Bertman によって, この「縮小して回転させる」という操作で得られる展開図が局所的に平坦折り可能となるための必要十分条件が, 「隣接する 2 つのタイルの回転中心を結ぶ線と, 2 つのタイルが共有する辺の成す角が 90 度である」ということが示されている[3]. 三谷は, ボロノイ図が上記の条件を満たすことに着目し, 対話的な操作で対称性を持ったボロノイ図を作り出せるソフトウェアを開発し, それに基づいた平織り作品を発表した[4]. また, 2015 年には Lang によって, ボロノイ図の模様折りたたむ展開図の設計技法が発表された[5].

本論文では, いわゆる「ドット絵」を, 平織りを構成する紙の層の重なりで表現する手法を提案する. ここでのドット絵とは, 正方格子のマス目に黒または白の色を割り当てることで絵柄を表現したものを指す. ドット絵を表現する他の手法として, 表と裏で面の色が異なる折り紙を用いる手法が, Demaine らによって紹介されている[6].

提案手法は, 平織りが多角形を敷き詰めた構造を表現できることと, 「段折り」と呼ばれる紙の折り込み (図 2) によって (平坦折りでありながらも) 微小な高低差を表現できることに着目する. 正方形のねじり折りを組み合わせる平織りの一部を改変し, ドット絵の黒色のマス目と白色のマス目の境目に相当する箇所に, 黒色のマス目が上位に来る段折りを配置する. 提案手法による作品の例を図 3 に示す. 左側のドット絵を, 平織りで表現したものが右側の写真に示すものである. 黒色のマス目に対応する領域と白色のマス目に対応する領域の境目に段折りが配置されることで, 図形が浮き上がって見える.

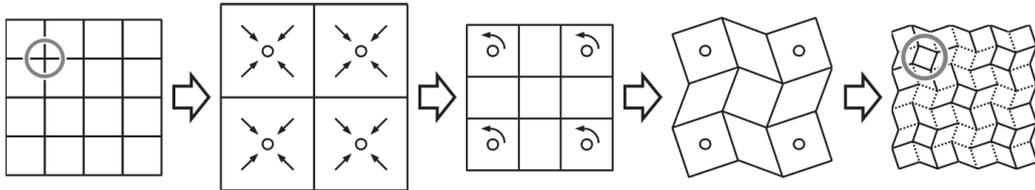


図 1 正方形の平面充填を縮小して回転させることで平織りの展開図を取得する操作

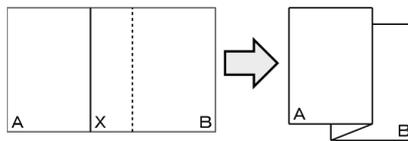


図 2 段折りの例

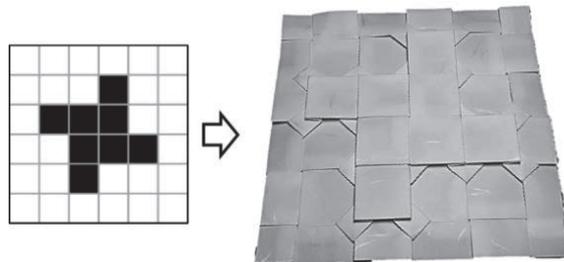


図 3 本研究が目的とする折り紙作品

2. 折り方の基本

本節では、本稿で用いる主要な折り方について説明する．まず、基本構造として取り扱う正方形のねじり折りと平織りについて説明する．次に段折りと浮き上がりの高低について言及する．なお文中では、展開図の輪郭と折り線で囲まれた多角形を**面**と呼ぶ．

2.1. 正方形のねじり折りと平織り

本稿で用いる平織りは、正方形を中心図形とするねじり折り（図4）を基本構造とし、これを並べることで作られる．図4左に示す展開図には、45度傾いた正方形が中央に置かれ、正方形の頂点から水平・垂直方向に段折りとなる折り線が伸びている．中央の正方形の面を時計回りに90度ねじるように折ることで、図4中央のように折りたたむことができる．また、折り畳んだ形を裏返すと図4右の状態となり、これを2×2の正方格子に見立てることができる．展開図の四隅の長方形の面に着目すると、図4右のように、すべての長方形の面は反時計回り先の長方形の面の下に重なるように段折りされており、どの面よりも上あるいは下に重なる面は存在していない．本稿では、このような状態を格子点Pの近傍の4面は「循環して重なる」と表現する．

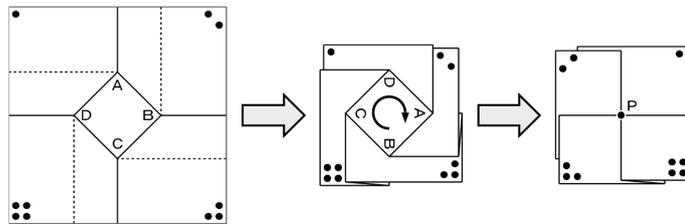


図4 正方形を基本としたねじり折り

図4に示したねじり折りは、鏡映反転したものを並べて連結できる．この連結したパターンは、互いに干渉することなく折りたたむことができる．図4左の4つのねじり折りを裏返して連結したものを図5左に示す．この場合内部に4つの格子点を含む、3×3のサイズの正方形格子が現れる．展開図の中央に長方形の面が存在しているが、各辺を段折りすることで正方形の領域を折りだしている．図5右の例では4×4の正方格子が得られる．展開図の内側には4つの大きな長方形の面が存在しているが、これらもまた段折りによって内側の2×2の正方格子を折りだしている．ねじり折りはいくつでも連結できるため、任意のサイズの正方格子を折りだすことができる．

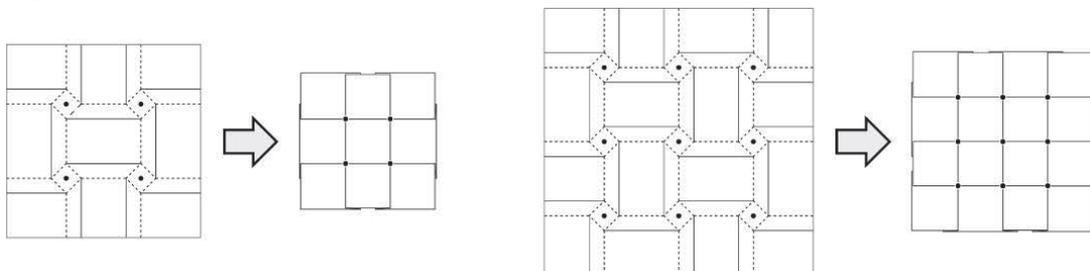


図5 ねじり折りと正方格子の平織り

この状態では、各格子点の近傍は「循環して重なる」ため、格子上のどの正方形の領域も、他の領域よりも上位に位置しない．提案手法では、正方形の領域を折りだす段折

りの向きを変更することで、ある面が他の面よりも上位に位置する状態を作り出し、それによってドット絵が浮き上がって見える表現を実現する。

2.2. 段折りと紙の高さ

図2に示すように、面Aと面Xが山折りで隣接し、面Xと面Bが谷折りで接するとき、「面A,Bは段折りの関係にある」と呼び、「AはBの上位に位置する」と表現するものとする。段折りは、平坦に折り畳んでも上位の面が下位の面から軽く浮き上がり、面の高低差を表現できる特徴がある。高低差は、周囲の面の折り方の影響を受け、ほとんど浮き上がらない場合もある。

たとえば、正方形のねじり折りの四隅の面は、それぞれ水平または垂直方向の長方形の面と段折りの関係にある。しかし、折りたたむと、展開図の中心点近傍は面が循環して重なり、浮き上がらない構造となる。

また図2に示すように段折りされた面X,Bの一部を、図6のように面Aの頂点vから面X,Bの境界線に向かう折り線で折り返すと、頂点v近傍で面AがBから浮き上がらない構造となる。本稿ではこのような状態のとき、頂点v近傍で「面A,Bの段折りを折り返す」と表現する。

本稿で取り扱う展開図において段折りの関係にある面A,Bが、ある頂点v近傍において「循環して重なる」構造、あるいは「段折りを折り返す」構造の場合、その頂点の近傍で同じ高さであるとみなす。

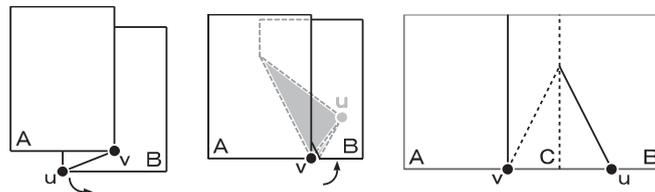


図6 段折りを折り返す構造（左：折り返す前、中央：折り返した後、右：展開図）

3. 提案手法

本節では、前節で述べた正方格子の平織りを使って、ドット絵を表現するための手法を説明する。はじめに、図7のように用語の定義を行う。

| | | |
|--|-----|-------------------------------------|
| | 格子点 | 正方格子中の線が交わる点のこと 左図には 25 含まれている |
| | 辺 | 格子点を両端にのみ含む線分のこと 左図には 40 含まれている |
| | セル | 4本の辺に囲まれた正形状の領域のこと 図には 16 含まれている |

図7 正方格子の用語

平織りの展開図が実際に折りたためるか否かの判定は NP 完全問題であることが Akitaya らによって示されている[7]。本稿では問題をさらに単純にするために、まず、 2×2 のサイズの正方格子について、折りたたむのに必要な基本構造の種類と、ドット絵に

対する基本構造の敷き詰め方を議論する．その後，基本構造の具体的な展開図を紹介し，その展開図を連結することでドット絵の展開図を設計する．

3.1. 平織りの基本構造と敷き詰め方

2×2 のサイズの正方格子で表現できるドット絵は， $2^4=16$ 通りあるが，回転と鏡映による重複を除外すると図 8 に示す 6 通りとなる．

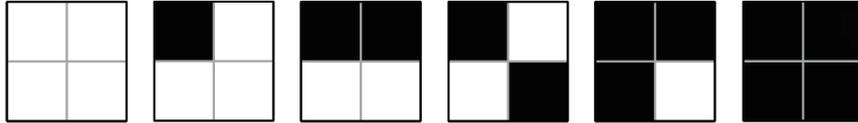


図 8 6通りの色の割り当てのパターン

2×2 のサイズの正方格子の各辺（境界を除く）に段折りを施す場合，辺ごとに，どちらを上位にするかによって 2 通りの場合が存在するため $2^4=16$ 通りあるが，こちらも回転と鏡映による重複を除外すると図 9 に示す 4 通りとなる．図中，矢印の先が上位のセルを指すものとする．パターン A は重なり方が循環する構造で，図 4 に示すねじり折りに相当する．

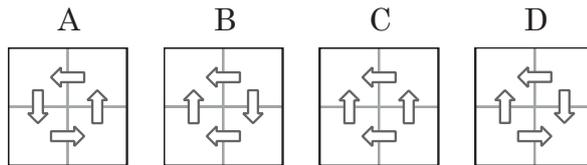


図 9 4通りの段折り配置のパターン

2×2 のサイズのドット絵の輪廓を浮き上がらせるために，次の規則で各辺に段折りを配置する．これらの規則をもとに，段折りの配置パターンとセルの色の割り当てパターンを整理する．

- 規則1. 黒色のセルと白色のセルが接する場合，黒色のセルが上位となるような段折りをする
- 規則2. 4つのセルすべてが黒，または白の場合は，図 9 のパターン A に示すように格子を折り込み循環して重ねる

まず，6通りの色の割り当てを横に並べ，4通りの段折りの配置パターンを縦に並べた表を図 10 のようにつくる．黒色と白色のセルの境界では，規則 1 より黒色が上位になるため，その境界における段折りの向きは固定される．一方で，それ以外の辺には段折りの向きを自由に決めてよい（あとで「段折りを折り返す」操作で固定する）．色の組み合わせと，段折りの配置パターンの向きが矛盾しない組み合わせを表から探すと，図 10 に示すように 11 通りの組み合わせが得られる．段折りの向きが固定されない辺は，セルの色の割り当てパターン 2,3,5 に 2 本ずつ含まれるため，段折りの割り当て方は $2^2=4$ 通り考えられる．しかしながら，回転と鏡映による重複を除外すると，取り得る全ての組み合わせが図 10 に含まれていることを確認できる．提案手法では，最終的に，この 11 通りの折り方を組み合わせることで全体を折る．そのため，このパターン群を**基本構造モデル**と呼ぶこととする．

この 2×2 の基本構造モデルを用いて、 $n \times m$ のドット絵の各辺に段折りを配置する (図 11). 具体的には、ドット絵の内側に含まれる $(n-1) \times (m-1)$ 点の格子点に、基本構造モデルを割り当てる. 隣接する格子点に割り当てる基本構造モデルは、同じ辺を共有するため、その辺に配置する段折りの方向が矛盾しないようにする必要がある. 基本構造モデルを用いて、任意のドット絵の各辺に、矛盾なく段折りの方向を割り当てられることは、次の操作で確認できる. 内部格子点を左から右へ、上から下に向かって順に基本構造モデルを割り当てる. 格子点へ割り当てる基本構造モデルは、6通りの色の割り当てとそれによって確定される段折り方向、格子点の上側と左側の辺に割り当てられている段折り方向に矛盾しないものを選択する必要がある. 各辺に割り当てられている段折りの方向は、折りたたみの規則を満たしており、基本構造モデルには規則を満たすすべての折り方が含まれているため、選択できない場合が存在しないとわかる. また、格子点の右側あるいは下側の辺に段折り方向が割り当てられていない場合は、段折りの向きを自由に決める. そのため、 $n \times m$ のドット絵の展開図は、複数考えられることが分かる.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | - | - | - | - | |
| B | - | | | - | | - |
| C | - | | | - | | - |
| D | - | | - | | | - |

図 10 11通りの基本構造モデル (行: 色の割り当てのパターン, 列: 折り込みの方向のパターン)

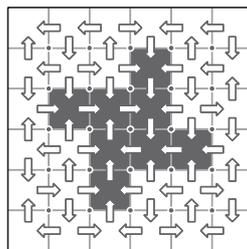


図 11 ドット絵に段折りの方向を割り当てた例

3.2. 基本構造モデルと展開図

図 12 に、11 通りの基本構造モデルに対応する展開図を示す。いずれの展開図も 45 度傾いた正方形が中央に置かれ、正方形の頂点から水平・垂直方向に折り線が伸びており、それぞれが図 9 に示す 2×2 の 4 通りの段折り配置のパターンを折りだせる。また、いずれの展開図同士も、段折りの方向に矛盾がないように連結すると、互いに干渉することなく折りたたむことができる。

これでは 4 通りの基本構造モデルにしか対応しないため、図 12 の展開図の山谷の割り当てを変更することで、全 11 通りの基本構造モデルに対応する展開図を図 13 のように作り出す。図中の黒色の面は、折り畳んだ際に黒色のセルに相当することを示す。折りたたんだ際に隣り合う黒色のセルは、図中の灰色の頂点の近傍で「段折りを折り返す」操作をおこない、灰色の面が折り返されるように山谷が割り当てて固定される。また、黒色のセルと白色のセルは、固定されない段折りが割り当てられている。隣り合う白色のセルの段折りは、いずれの折り方も許容している。

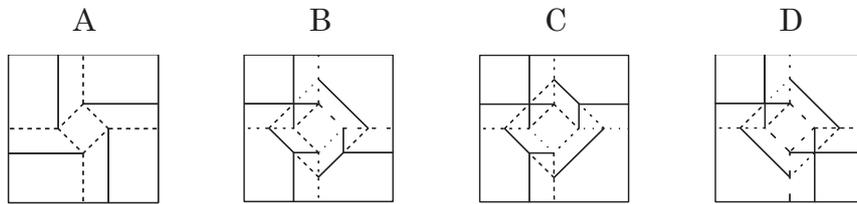


図 12 段折り配置のパターンに対応する展開図

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | — | — | — | — | |
| B | — | | | — | | — |
| C | — | | | — | | — |
| D | — | | — | | | — |

図 13 図 10 の基本構造モデルに割り当てる展開図の例

(黒色の面：黒色のセルに相当する面，灰色の頂点と面：頂点近傍で折り返される段折りの面)

図 13 の A 列以外の展開図は，それぞれ図 14 に示すように折り畳まれる．なお展開図 D2 は，右下の正方形の面と中央の正方形の面が，展開図の対角線の方角で，中央の正方形の面を上位とする折り返す段折りである．折りたたむと図 14 右のように，黒色のセルの対角に位置する白色のセルが，黒色のセルより低くなるように折られている．いずれの展開図を折り畳んでも，黒色のセルと白色のセルの境界には，45 度傾いた正方形が折り込まれている．

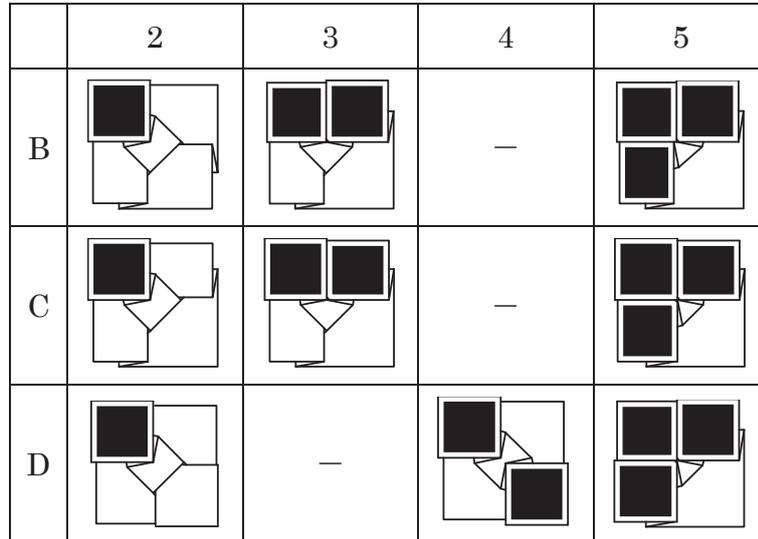


図 14 図 13 の B～D 列の展開図を折り畳んだ様子

これらの展開図を，ドット絵の内部格子点に敷き詰めた基本構造モデルに対応するように連結して敷き詰めることで，ドット絵を折り出す展開図を生成できる．

4. 結果

本手法で提案した基本構造モデルを用いて，実際に設計した展開図と，折り畳んだドット絵を紹介する．図 15 左に示す段折りの方向を割り当てた 6×6 のドット絵に対して，図 13 の通りに展開図を敷き詰めて設計したものが図 15 中の展開図である．単色の紙に展開図を写して実際に折り畳んだものを図 15 右に示す．単色でありながら，黒色のセルに該当する面が，白色のセルに該当する面より浮き上がっていることで，目的とするドット絵が折れていることが確認できる．また，黒色と白色のセル面に該当する面の間には，45 度傾いた正方形が折り込まれているため，真上から見ても，色の境界線がハッキリと分かることを確認できた．

より大きなサイズのドット絵を対象に展開図を設計した例を図 16 に示す．このように任意のドット絵に対して，段折りの方向を指定して基本構造の展開図を敷き詰めるという単純な操作で，展開図を容易に作り出すことができた．

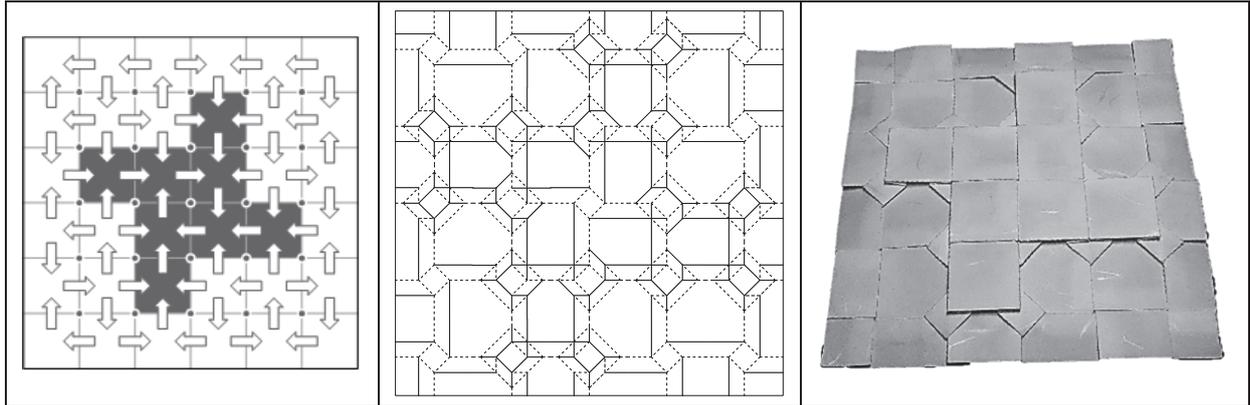


図 15 試作したドット絵の展開図と折った後の写真

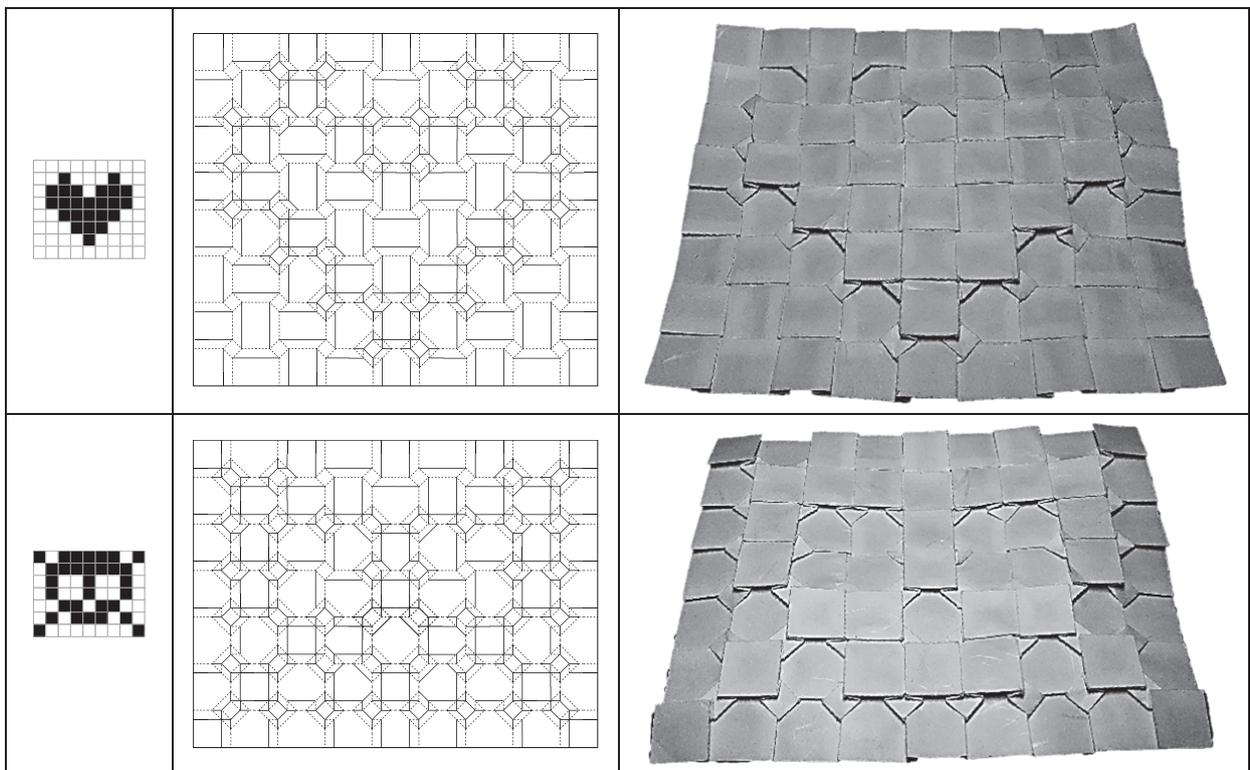


図 16 ハート（上段）とガイコツ（下段）の展開図（中）と折った後の写真

5. まとめ

本研究では、正方形のねじり折りを基本とする平織りが、正方形を敷き詰めた構造を表現できることと、「段折り」と呼ばれる紙の折り込みによって、微小な高低差を表現できることに着目し、ドット絵が浮き上がるように平織りで表現する手法を考察した。その結果、11種類の基本構造となる展開図を連結することで、任意のドット絵に対応した展開図を設計できることを示した。設計した展開図を実際に折りたたみ、ドット絵が浮き上がることを確認した。

今後の課題は、基本構造モデルとして使用できる他の展開図を調査すること、また、正六角形の格子や正三角形の格子、ボロノイ図など、正方格子以外の多角形が平面充填され

た図を対象にすることである.

文献

- [1] アレックス バイトマン, “平織り (折り紙テッサレーション) デザインのためのコンピュータ・ツールとアルゴリズム”, 折り紙の数理と科学, Thomas Hull 編, 森川出版, 第 12 章, 2005.
- [2] Alex Bateman, “Tess:origami tessellation software”, <http://www.papermosaics.co.uk/software.html> (2017/04/23 アクセス).
- [3] Robert J. Lang, Alex Bateman, “Every Spider Web Has a Simple Flat Twist Tessellation”, Origami⁵, CRC Press, pp455-473, 2011.
- [4] 三谷純, “ボロノイ図に基づく平坦折り可能な折り線図の設計支援システム”, 日本機械学会, 第 23 回 設計工学・システム部門後援会, 沖縄, 2013.
- [5] Robert J.Lang, “Spiderwebs, Tilings, and Flagstone Tessellations”, Origami⁶, CRC Press, pp189-200, 2015.
- [6] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Goran Konjevod, Robert J. Lang, “Folding a Better Checkerboard” ISAAC, Algorithms and Computation pp 1074-1083, 2009.
- [7] Hugo A. Akitaya, Kenneth C. Cheung, Erik D. Demaine, Takashi Horiyama, Thomas C. Hull, Jason S. Ku, Tomohiro Tachi, and Ryuhei Uehara, “Box pleating is hard”, JCDCGG 2015, Lecture Notes in Computer Science, volume 9943, Kyoto, Japan, September 14-16, 2015, pages 167-179.