

論文名 Title	相似な形に折りたためる 剛体折り可能な正多角形の提案	Proposal of a rigidly foldable and uniformly deployable regular polygon
著者 Author(s)	山本陽平, 三谷純	Yohei Yamamoto, Jun Mitani
受理年月日 Date of acceptance	2020/11/5	
掲載 First publish	『折り紙の科学』 (“Science of Origami”) 2022/03/27 Vol. 8 No. 1 page 3-16	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

相似な形に折りたためる

剛体折り可能な正多角形の提案

山本陽平† 三谷純†

† 筑波大学

305-8573, 茨城県つくば市天王台 1-1-1

yohey.yamamort@gmail.com

Proposal of a rigidly foldable and uniformly deployable regular polygon

Yohei Yamamoto†, Jun Mitani†

†305-8573, Tennodai 1-1-1, Tsukuba, Ibaraki, JAPAN

要約：ミウラ折りに代表される剛体折り可能な折り紙パターンは、折りたたみと展開による伸縮機構を持つ構造物に活用できる。しかし、そのようなパターンは幾何学的な制約が厳しく種類が限られる。そこで本稿では、既存の剛体折りが不可能なパターンにスリットを加えることで、新たな剛体折り可能なパターンを生成する方法を提案する。提案するパターンは正多角形の形をしており、相似な形に折りたためる、周期的に互いに連結できる、伸縮機構を持つ構造物を生成できるといった特徴を有することを確認した。

キーワード：剛体折り紙, 剛体折り可能, 平織り

Abstract: Rigid foldable origami patterns, such as Miura-Ori, can be used for deployable mechanical structures. However, due to the strict geometric constraints of the patterns, the known ones are limited in variety. In this paper, we propose a method to create rigid foldable origami patterns by adding slits to the non rigid foldable patterns. The patterns created by the proposed method are regular polygons that can be folded into similar shapes, and connectable each other. They can be used to build various deployable structures.

Keyword: Rigid origami, Rigid foldable, Origami tessellation

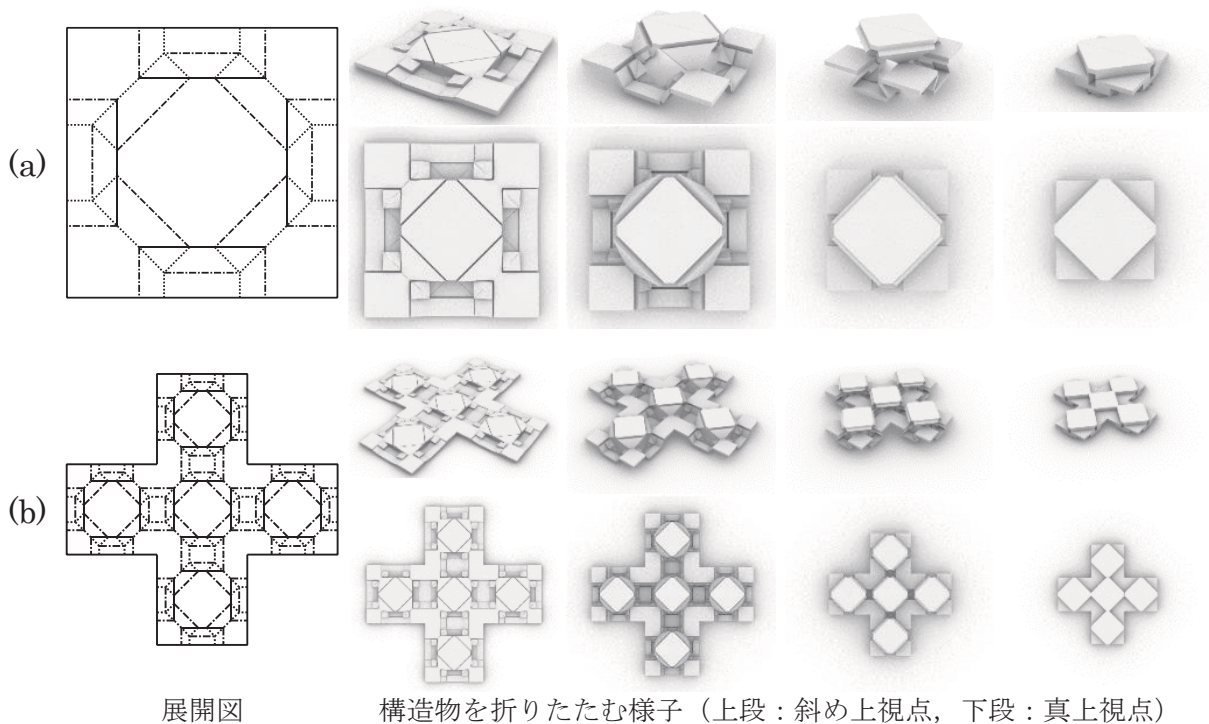
1. はじめに

折り紙は、紙を折ることで形を作る日本の伝統的な遊戯の一つである。その一方で、折り紙の技術は、伸縮機構を持つ構造物に活用されている。活用される展開図のうち、素材の厚さがゼロであることを前提とした面を伸縮、湾曲させることなく折りたためることが保証されるものは、剛体折り可能と呼ばれる。代表例として、ミウラ折り、風船の基本形、吉村パターンが知られている。剛体折り可能な展開図からは、面に該当するパネルをヒンジで接続した展開構造物が作れるため、人工衛星の太陽電池パネル[1]や建造物[10]、防弾シールド[13]などに応用されている。こうした背景から、剛体折り可能な展開図を豊富にすることは、折り紙の活用の幅を広げるうえで有用である。

剛体折り可能な展開図は幾何的な制約が厳しいため、作成できるパターンが限られる[6]. 一方で、展開図にスリットを含めることで、剛体折り可能にできる事例が知られている[4]. 本研究では、正多角形を相似な形に折りたたむことができるが剛体折り可能でない既存の展開図にスリットを加えることで、剛体折り可能な展開図を作成した. また、その展開図から、厚みのあるパーツで構成された伸縮機構を持つ構造物を作成した. 提案する展開図、ならびに構造物の一例を図 1(a)に示す. 提案する展開図と構造物は、折りたたむ過程を真上から見ると常に相似になるという特徴の他、工学分野への貢献が期待できる次の 2 つの特徴を持つ.

1. 1 自由度で折りたたむことができる
2. 接続することで、同様の伸縮機構を持つ展開図（構造物）を作成できる

1 自由度である点は、理論的にはいずれかのヒンジを動かすと全体のヒンジが連動するため、折りの過程を制御し易いことを示す. 接続できる点は、図 1(a)を接続することで図 1(b)のような展開図と構造物を作成できるように、伸縮する構造物を容易にデザインできることを示す. 以降では、提案する正 n 角形の展開図は、接続の基本となるため、正 n 基本形と呼ぶ.



展開図

構造物を折りたたむ様子（上段：斜め上視点，下段：真上視点）

図 1 提案する展開図（鎖線：山折り，点線：谷折り，実線：切り取り線）と構造物

本稿の構成は次のとおりである. 2 節では、正 n 基本形を作図するための基礎知識を説明する. 3 節では、正 n 基本形を作図する手順、ならびに、その特徴について議論する. 4 節では、厚みのあるパーツを接続することで、構造物を実現する. 5 節では、構造物を計算機上で折りたたむ過程をモデリングした結果、ならびに 3D プリントしたものを折りたたんだ結果を示す. 6 節では、まとめと今後の課題を述べる.

2. 関連する幾何学

本節では、提案する展開図を作図するための幾何的な基礎知識を述べる．まず、2.1 項では、展開図の持つ幾何的な特徴を述べる．2.2 項では、正 n 基本形の作図に用いる既存の折りパターンを紹介する．

2.1. 展開図の特徴

本稿では折り線の端点を頂点と呼び、折る過程で折り線を共有する 2 つの面が成す角度を折り角と呼ぶ（本稿では折り角は大きさにのみ着目する）．折り角の大きさは、展開した場合に 0 、折りたたんだ状態の場合に π となるものとする．また、すべての折り線の折り角が 0 となる場合を展開状態、 π となる場合を折りたたみ状態、それ以外を折り状態と呼ぶ．

平坦折り条件を満たす 2 枚の展開図の輪郭上の辺を合わせることで 1 枚の平坦折り条件を満たす展開図を得る操作を展開図の接続と呼ぶ．例えば、ある辺に接するすべての折り線が辺に垂直である場合、少なくともその辺で鏡像対称となる 2 枚の展開図 A, B を接続できる（図 2）．接続した展開図 A, B は、一方の折り線の延伸上にもう一方の折り線が位置するため、接続した辺上で平坦折りが可能となる．このように、接している折り線が自身と垂直になる辺を接続の十分条件を満たす辺と呼ぶ．

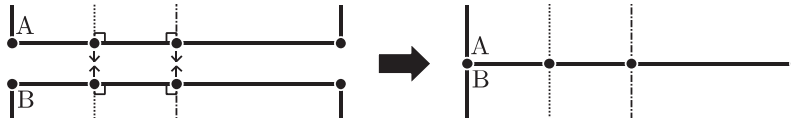


図 2 展開図の接続の様子

2.2. 相似な形に折りたたむ折りパターン

紙を相似な形に折りたたむ方法は何通りも考えられる．正方形の紙の場合、向かい合う辺に垂直な 2 本の線で段折りした後、残りの 2 辺に同じ折りを行うことで、小さな正方形の形に折りたためる．ねじり折りと呼ばれる折りパターンは、正多角形の紙を収縮するように折りたためることが知られている．Demaine らは、任意の多角形を平行な折り線を用いて相似な形に折りたたむ方法を提案した [8]．また、Lang が示した Flagstone tessellation と呼ばれる折りパターンの作図方法により、正 n 角形の紙から、回転・鏡像対称性を持ち平坦で相似な形に折りたためる展開図を作成できる [9]．以降、この展開図を FT 基本形と名付ける．本稿で提案する正 n 基本形は FT 基本形を変形することで作図する．そのため本項では、FT 基本形の作図方法とその特徴を示す．

FT 基本形の作図は、正 n 角形 P_1 と収縮率 r ($0 < r \leq 2/(3 + \tan^2 \theta)$) (ただし $\theta = \pi/n$) を用いておこなう．作図された FT 基本形は、1 辺が $1 - r$ 倍した正多角形に折りたためる． r の上限は、FT 基本形を相似な形に折りたたむための制約であり、FT 基本形から得られた正 n 基本形を接続した構造物を折りたたむ過程で、一部のパーツの衝突を防ぐことができる．作図の手順を以下に示し、正方形を対象にした各手順の例を図 3 に示す（垂直・等間隔の記号は対称性を考慮し一か所のみ記述する）．

- (1) P_1 の各辺を r 倍した多角形 (P_2) と P_1 を、外心をそろえて配置する．

- (2) P_2 の各頂点から P_1 の近傍の2辺へ，垂線となる山折り線を作図する。
- (3) P_2 の各頂点と外心の垂直二等分線からなる谷折り線を作図する．頂点は，隣り合う折り線との交点とする．作図した折り線が描く多角形を P_3 とする。
- (4) P_3 の頂点と P_2 の近傍の2頂点を結ぶ山折り線を作図する。
- (5) 外心と P_3 の頂点と結んだ線分を，外心から1.5倍伸ばすように配置する。
- (6) 5で配置した線分の外側の端点から，(2)で作図した折り線と接する垂線を配置する．その垂線と中心と傾きが同じで長さを0.5倍した線分を山折り線として作図する。
- (7) 5で作図した折り線の各端点から P_1 の近傍の辺へ，垂線となる谷折り線を作図する．同様の端点と近傍の P_2, P_3 の頂点を結ぶ谷折り線を作図する。

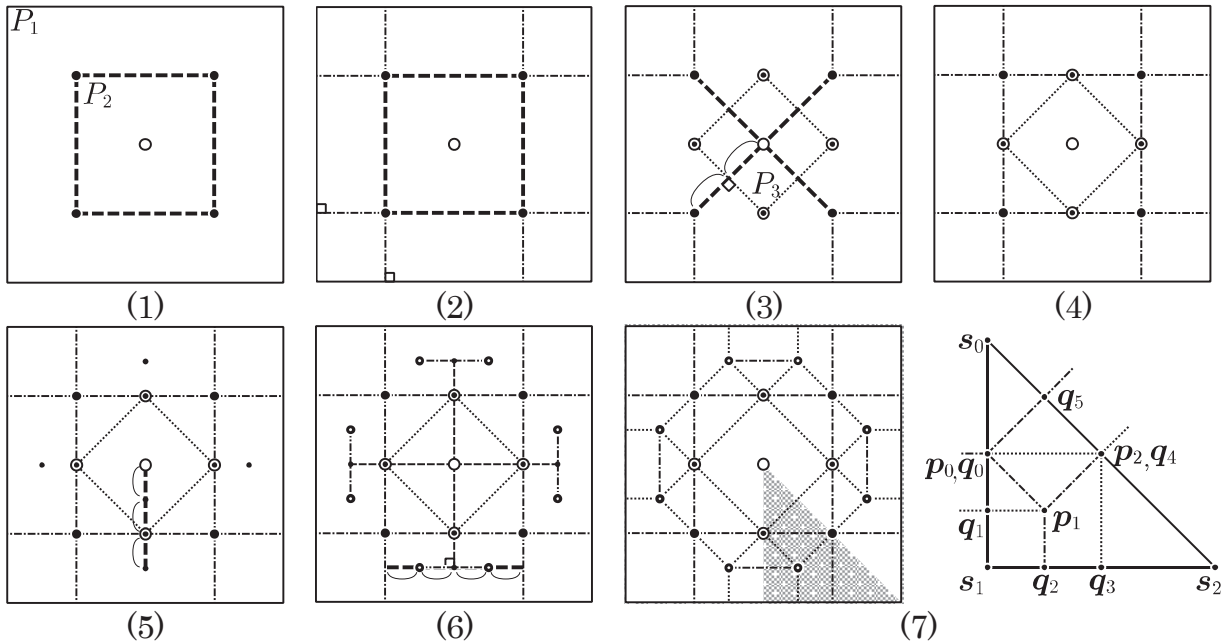


図 3 FT 基本形の作図手順とその分子

次に，FT 基本形の特徴を示す．FT 基本形は，外心と各頂点ならびに辺の中点を結ぶ線によって， $2n$ 枚の合同な直角三角形の展開図に分割できる．分割された各展開図を分子と呼ぶ．例えば，図 3(7)左灰色の領域，またはその領域に対応する図 3(7)右が 1 枚の分子である．分子の折り線の数とつながり方は常に一定であるため，各頂点に次の名前を与える (図 3(7)右)．まず，外周の頂点を s_i ，中央に位置する三角形の頂点を p_i と反時計回りに名付ける ($i = 0, 1, 2$)．なお s_i は，辺 s_1s_2 が FT 基本形の辺，頂点 s_2 が FT 基本形の縁の頂点となるように名付ける． p_i は，線分 $p_i p_{i+1}$ の端点が辺 $s_i s_{i+1}$ の垂線となる折り線を持つように名付ける．また，この垂線の足をそれぞれ q_{2i}, q_{2i+1} とし， $\overline{p_i q_{2i}} = d_i, \overline{q_{2i} q_{2i+1}} = w_i$ とする． d_0, d_2 は常に 0 となるが，線分 $p_0 q_0$ と線分 $p_2 q_4$ を正 n 基本形の作図に用いるため，これらは線分として定義する．分子は常に， $\angle p_i p_{i+1} q_{2i+1} = \pi/2 - \theta, \angle p_0 p_1 q_2 = \angle q_1 p_1 q_2 = \pi/2$ を満たす．分子の折りパターンは，剛体折り可能で無いことが知られている三角形のねじり折り (山谷の割り当て方は考慮しない) と呼ばれる折りパターンと一致する[7]，そのため，FT 基本形も剛体折り可能ではないと言える．

3. 正 n 基本形の特徴

本節では、切り取り線を含む展開図である正 n 基本形を紹介する．まず，3.1 項では，正 n 基本形の作図方法を示す．3.2 項では，剛体折り可能であることを示す．3.3 項では，1 自由度であることを示す．3.4 項で，展開図を接続する方法を示す．

3.1. 正 n 基本形の作図方法

正 n 角形の正 n 基本形は，次の手順で作図できる．

1. 正 n 角形から，FT 基本形を作図し，FT 基本形の分子を取得する
2. FT 基本形の分子の辺 s_0s_1, s_2s_0 を外側にずらすように拡張する
3. 拡張した分子の折り線に，山谷・切り取り線を割り当てる
4. 山谷を割り当てた分子と合同な $2n$ 個の展開図を再度接続する

例えば，図 3(a) の FT 基本形の分子から，図 4(a) の分子を作成・接続することで，図 1(a) の正 n 基本形が得られる．基本形は，FT 基本形と同様に合同な分子を接続した，回転・鏡像対称性を持つ展開図である．本項では，手順 2,3 を詳しく説明する．

手順 2 では，分子の辺 s_0s_1, s_2s_0 をそれぞれ外側にずらして，元の分子と相似な外周となるように拡張する．拡張は， $p_0q_0 \perp s_0s_1$ を満たすように頂点 q_0 を再配置した場合に $d_0 > 0$ を満たし，同様に頂点 q_4 を再配置した場合に $d_2 > \max(0, (w_0 \cos 2\theta)/(2 \cos \theta))$ を満たすようにする．また， q_1 と q_5 も再配置する．拡張によって，切り取り線の割り当てによる分子の分割と，4 節で作成する構造物の干渉を防ぐことができる．拡張後の分子における各辺 $s_i s_{i+1}$ は接続の十分条件を満たすため，変形した分子は手順 4 で接続できる．

手順 3 では，分子の線分 p_1p_0 ，線分 p_1q_2 ，線分 p_1p_2 ，線分 p_2q_4 に谷折り線，線分 p_0q_0 ，線分 p_0p_2 に切り取り線，それ以外に山折り線を割り当てる．スリットを考慮すると，分子の内側に含まれる頂点は 4 価値頂点である p_1 のみであり，FT 基本形よりこの頂点近傍は平坦に折りたためることが保証されているため，分子は剛体折り可能である[3]．

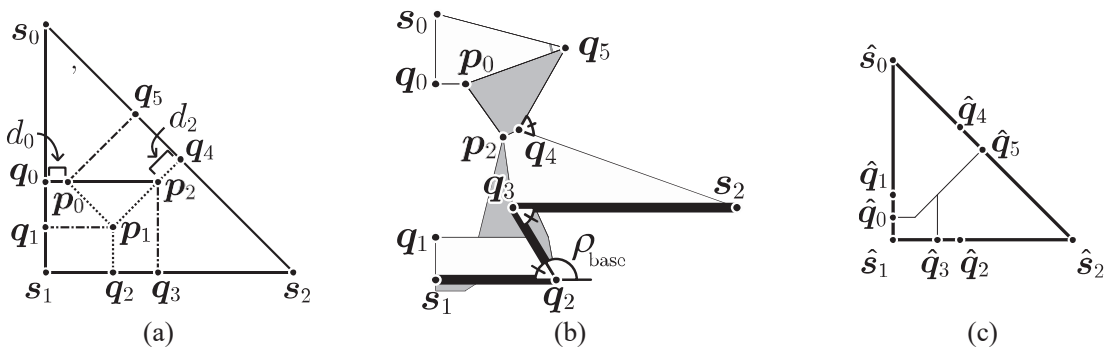


図 4 正 n 基本形の分子と折り状態

3.2. 正 n 基本形の剛体折り可能性

本項では，正 n 基本形の折り状態を，分子の折り状態が接続したものとみなし，接続された分子の面が変形しないことを用いて，正 n 基本形が剛体折り可能であることを示す．本項以降，特に明記の無い限り，分子の折り状態は，常に頂点 s_1 が原点に位置し，線分 s_1q_2

が x 軸，線分 s_1q_1 が y 軸に乗るものとする。

さて，分子の折り線 $p_0q_5, p_2q_4, p_2q_3, p_1q_2$ の折り角の大きさが同一の値 ρ_{base} となる折り状態を考える (図 4(b))。この場合，面 $s_2q_4p_2q_3$ と面 $s_1q_2p_1q_1$ が xy 平面と平行になる。この関係は， xz 平面と面 $s_2q_4p_2q_3$ ，面 $s_1q_2p_1q_1$ がそれぞれ垂直であり， xz 平面上で線分 s_1q_2 ，線分 q_3s_2 に接する線分 q_2q_3 の成す錯角が等しくなることから確認できる。同様に，面 $s_0q_0p_0q_5$ も xy 平面と平行である。ここで，折り状態における各頂点を， z 軸方向から xy 平面に投影する (図 4(c))。投影された頂点に「 \wedge 」をつけ， $\triangle \hat{s}_0\hat{s}_1\hat{s}_2$ を射影三角形と呼ぶ。この時， $\triangle \hat{s}_0\hat{s}_1\hat{s}_2$ と $\triangle s_0s_1s_2$ が相似となるとを，次の式より確認できる。まず，

$$(3.1) \quad \overline{\hat{s}_1\hat{s}_2} = \overline{s_1q_2} + \overline{q_3s_2} + w_1 \cos \rho_{\text{base}}$$

である。 $e_i = \overline{s_i s_{i+1}}$ とすると， e_1 と $\overline{\hat{s}_1\hat{s}_2}$ には，次の関係式が成り立つ。

$$(3.2) \quad e_1 : \overline{\hat{s}_1\hat{s}_2} = e_1 : e_1 - w_1(1 - \cos \rho_{\text{base}})$$

同様に e_2 と $\overline{\hat{s}_2\hat{s}_0}$ には，次の関係式が成り立つ

$$(3.3) \quad e_2 : \overline{\hat{s}_2\hat{s}_0} = e_2 : e_2 - w_2(1 - \cos \rho_{\text{base}})$$

一方，分子は三角形のねじり折りの折りパターンであるため，次の関係が成り立つ[11]。

$$(3.4) \quad e_0 : e_1 : e_2 = w_0 : w_1 : w_2$$

式 3.4 より， $e_1 : w_1 = e_2 : w_2 = 1 : k$ とすると，式 3.2, 3.3 は，

$$(3.5) \quad e_1 : \overline{\hat{s}_1\hat{s}_2} = e_2 : \overline{\hat{s}_2\hat{s}_0} = 1 : (1 - k(1 - \cos \rho_{\text{base}}))$$

となる。 $\triangle \hat{s}_0\hat{s}_1\hat{s}_2$ と $\triangle s_0s_1s_2$ の関係は， s_1 と \hat{s}_1 に着目すると，それらの頂角と頂角を成す 2 辺の比が等しくなるため相似である。この相似の関係を成す折り状態を，所定の折り角の大きさが一様に ρ_{base} となることから，折り角 ρ_{base} の一様折り状態と呼ぶ。一様折り状態において，射影三角形の辺 $\hat{s}_i\hat{s}_{i+1}$ 上に，分子の辺 $s_i s_{i+1}$ 上のすべての点が投影されるため，辺 $s_i s_{i+1}$ を含む面は，辺 $\hat{s}_i\hat{s}_{i+1}$ を通り xy 平面空間に垂直な平面空間と垂直に接する特徴を持つ。

次に， yz 平面空間で鏡像対称となる 2 枚の分子を考える。展開状態において，これらの分子は接続できる。また，これらの分子が鏡像対称な一様折り状態となる場合，射影三角形も鏡像対称となり，辺 s_0s_1 を含む面を接続した面は，それぞれ yz 平面空間と垂直に接する。これらの分子を接続した展開図 C (図 5(a)) (鏡像対称となる頂点に「*」をつけて区別する) は， ρ_{base} が 0 から π になる鏡像対称な一様折り状態の連続で折りたたむ場合，その過程で面は変形しないため，剛体折り可能である。同様に，正 n 基本形は，各分子が同一の折り角の一様折り状態となる場合，それぞれの射影三角形が辺を共有し，展開図と相似な多角形 (以後，射影多角形と呼ぶ) を構成するため，剛体折り可能である。なお，以降では，分子を接続した展開図の一様折り状態とは，各分子が同一の一様折り状態である場合を指すものとする。

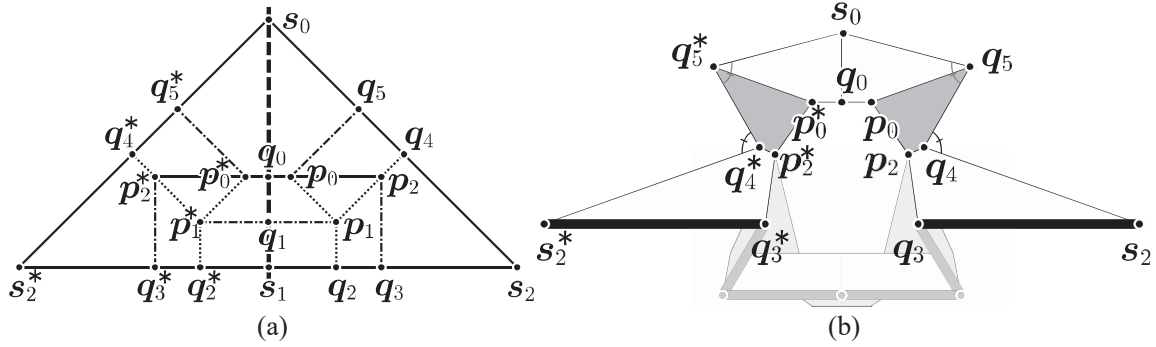


図 5 展開図 C と折り状態

3.3. 正 n 基本形と自由度

本項では、正 n 基本形が 1 自由度であることを示す。まず正 n 基本形が、一様折り状態の連続でのみ折りたたまれると仮定する。この場合、式 3.1 より、 ρ_{base} が決まると射影多角形の辺の長さが一意に定まる。そのため、正 n 基本形の折り状態は一様折り状態に限られることを示せば、正 n 基本形は 1 自由度であると言える。以降、展開図 C に着目し、その折り状態を議論する。

まず、展開図 C から、頂点 p_1, p_1^* を含まない面を取り除いた展開図を考える。この展開図は、折り線 p_1q_1 と $p_1^*q_1^*$ を共有する鏡像対称である。頂点 p_1 を端点とする 4 本の折り線で構成される右半分の機構は、自由度 1 であると知られているため[3]、頂点 p_1, p_1^* を含む左右を合わせた機構の折り状態もまた、自由度 1 で定まる鏡像対称の形となる。そのため、展開図 C を折りたたむ過程では、折り線 p_2q_3 と $p_2^*q_3^*$ が平行である必要がある。

次に展開図 C から頂点 p_1, p_1^* を含む面を除いた展開図の折り状態（ただし、面 $s_0q_5p_0^*p_0q_5$ が xy 平面と平行で、線分 s_0q_0 が yz 平面に含まれると仮定する）を考える（図 5(b)）。折り線 p_0q_5 と $p_0^*q_5^*$ は、線分 s_0q_0 と垂直・平行のいずれでもないため、折り線 p_2q_3 と $p_2^*q_3^*$ が平行となる場合は、面 $s_2q_4p_2q_3$ と面 $s_2^*q_4^*p_2^*q_3^*$ の法線が z 軸方向の場合に限られる。面 $s_2q_4p_2q_3$ の法線が z 軸方向となる場合は、折り線 p_0q_5 、 p_2q_4 の折り角の大きさが等しい場合、あるいは一方が 0 もう一方が π の場合である。そのため、この展開図を折りたたむ過程で、常に面 $s_2q_4p_2q_3$ の法線が z 軸方向となる折り状態の連続で折りたためる場合は、折り線 p_0q_5 、 p_2q_4 の折り角の大きさが等しい場合に限られる。面 $s_2^*q_4^*p_2^*q_3^*$ についても同様である。

展開図 C の折り状態で、折り線 p_0q_5 、 p_2q_4 の折り角の大きさ、折り線 $p_0^*q_5^*$ 、 $p_2^*q_4^*$ の折り角の大きさがそれぞれ等しくなる場合は、明らかに、一様折り状態の場合に限られる。展開図 C は、一様折り状態の連続でのみ折りたたむため、正 n 基本形は 1 自由度である。

3.4. 正 n 基本形の接続

正 n 基本形の各辺は、接続の十分条件を満たしているため、次の場合に接続できる。

まず、2 枚の同一の正 n 基本形の接続を考える。基本形は接続する辺で鏡像対称となるため接続が可能である。接続した展開図の折り状態において、各基本形の射影多角形は、辺を共有するように接続されるため、接続した展開図は 1 自由度で剛体折り可能である。

同様に、同一の正 n 基本形を複数接続した展開図も、1 自由度で剛体折り可能である。

次に、2 枚の異なる正 n 基本形の接続を考える。異なる 2 枚の基本形は、基本形の間で、互いの辺ならびに分子上の線分 s_1q_2 、線分 q_2q_3 、線分 q_3s_2 の長さがそれぞれ等しい場合に接続できる。そのような基本形は、次の手順で作図できる。まず、各基本形の元となる FT 基本形を、外周の 1 辺の長さ l 、収縮率 r が等しくなるように作図する。このとき線分 q_2q_3 の長さは $lr/4$ となる。次に、 d_0 と $d_2/\cos\theta$ がそれぞれ等しくなるように、展開図を作図する。この時、基本形間で、線分 s_1q_2 、線分 q_3s_2 が等しくなる。以上の手順で作図した展開図を接続したものは同一の正 n 基本形を接続した場合と同様に、1 自由度で剛体折り可能である。

4. 厚みのある構造物

素材の厚さがゼロであることを前提とする剛体折り可能な展開図から生成される構造物は、展開図の各面からなるパーツをヒンジでつなげたものである。この構造物は、パーツの形や折りたたみの稼働範囲等が異なる複数の方法が提案されている[12]。本稿では、正 n 基本形から構造物を作成するために、展開図の自由度と可動範囲を一般的には維持できる Hinge shift と呼ばれる手法を用いる[5]。Hinge shift が作成する基本的な構造物の例を図 6(a)に示す。構造物の各パーツは、展開図の対応する面と合同な板状の形をしている。各ヒンジは、山折り線で接するパーツの下面の辺同士、谷折り線で接するパーツの上面の辺同士を接続する(図 6(b))。構造物を折りたたむ過程では、ヒンジを軸にパーツ同士が回転する(図 6(c))。このとき、ヒンジで接続されたパーツの側面が成す角度もまた折り角と呼ぶ。厚みやパーツの形は、制約が付く場合がある。本節では、4.1 項で Hinge shift を用いて提案する構造物を作成する方法を述べ、4.2 項でその特徴を述べる

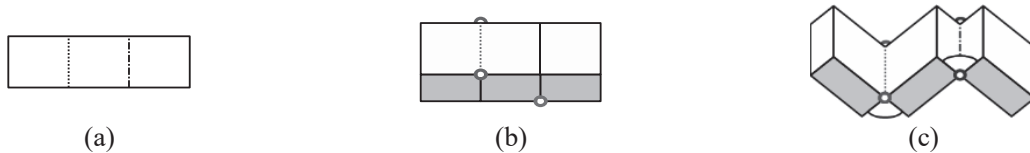


図 6 Hinge shift の例

4.1. 厚みのある構造物の作成手順

本項では正 n 基本形の構造物を、分子単位で作成した構造物を接続することで作成する。分子の構造物は、次の制約下で作成される。まず、パーツの形の制約を示す。面 $p_0p_1p_2$ のパーツは、面 $p_0p_1p_2$ の成す板の上に、面 $t_0p_1p_2$ (t_0 は線分 p_2p_0 上の $\angle p_0p_1q_1 = \angle p_0p_1t_0 (= \alpha)$ を満たす点) の成す板を重ねたものである(図 7(a))。面 $p_1q_2q_3p_2$ のパーツは、面 $p_1q_2q_3p_2$ の成す板の上に、面 $p_1t_1p_2$ (t_1 は線分 q_3p_2 上の $\angle t_0p_1p_2 = \angle p_2p_1t_1 (= \beta)$ を満たす点) の成す板を重ねたものである。それ以外のパーツは、一般的な板状である。次に厚みの制約を示す。説明のために、 p_1 を含む 4 枚の面によって作成されたパーツとその厚み h_i を図 7(b)に示す(図 7(b)に示す頂点は、図 7(a)の面と対応する上面の頂点を指す)。ここで、 h_0 と h_2 は任意に決定でき、それ以外には以下の制約が成り立つ[5]。

(4.1)	$h_1 = h_4 = h_3 \sin \alpha = h_5 \sin \alpha$
-------	---

p_1 を含まない面 $s_0q_0p_0q_5$, 面 $p_2q_4q_5p_0$, 面 $s_2q_4p_2q_3$ によるパーツの厚みは, 面 $p_2q_4q_5p_0$ のパーツにのみ w_2h_0/w_1 となる制約を課す. この制約は, 分子の構造物の機構を保って接続させるための制約である. 以上の制約下で作成したパーツを接続することで, 分子の構造物を作成できる (図 7(c)). 構造物は分子と同様に, p_1 近傍の 4 本のヒンジの内 1 本の折り角を決定すると, 残り 3 本の折り角の大きさ (図 7(c)の白いパーツの成す形状) が一意に定まる特徴と, 一様折り状態の連続で折りたたむことができる特徴を持つ.

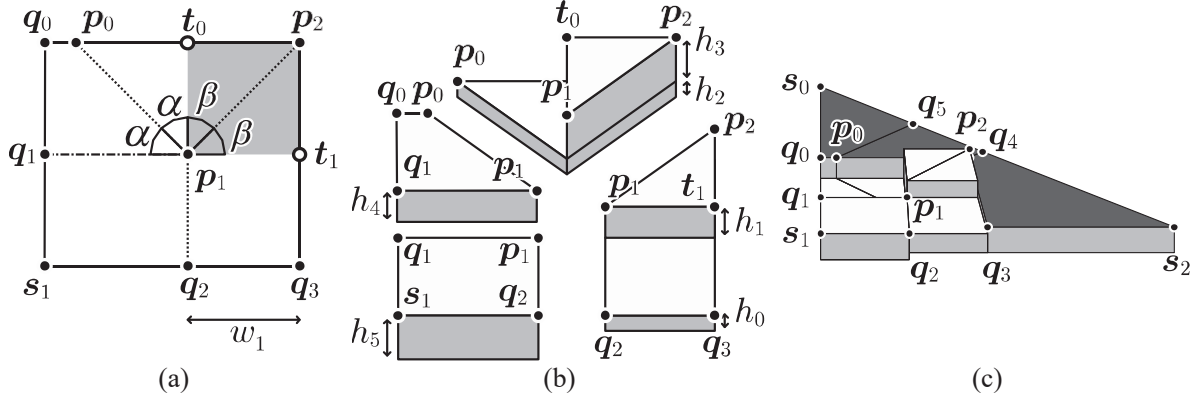


図 7 分子の構造物

分子の構造物の接続によって, 正 n 基本形の構造物を作成できる. この正 n 基本形の構造物が折りたたむことは, 分子の構造物の一様折り状態を上から見た形が, 常に相似な直角三角形 (以後, 射影三角形と呼ぶ) であることが保証する. 分子の構造物の射影三角形は, 面 $s_0q_0p_0q_5$, 面 $s_2q_4p_2q_3$, 面 $s_1q_2p_1q_1$ の 3 面から作成されるパーツの上面に, それぞれ元の面と同じ頂点名を与え (図 8(a)), これらの頂点を z 軸方向から xy 平面に投影した際の $\triangle \hat{s}_0\hat{s}_1\hat{s}_2$ である (図 8(b)). 一様折り状態の射影三角形が常に相似であることは, 次の関係より示すことができる. まず, $\overline{\hat{s}_1\hat{s}_2}$ は, xz 平面上に含まれる幾何要素 (図 8(a)の濃い灰色の面, ならびに図 8(c)の示す xz 平面) より, 以下の式で求められる.

(4.2)	$\overline{\hat{s}_1\hat{s}_2} = \overline{s_1q_2} + \overline{q_3s_2} + (w_1 \cos \rho_{\text{base}} + h_0 \sin \rho_{\text{base}})$
-------	---

次に, 面 $p_2q_4q_5p_0$ のパーツの厚みが, w_2h_0/w_1 であるため,

(4.3)	$\overline{\hat{s}_2\hat{s}_0} = \overline{s_2q_4} + \overline{q_5s_0} + (w_2 \cos \rho_{\text{base}} + w_2h_0/w_1 \sin \rho_{\text{base}})$
-------	--

が成り立つ. $e_1: \overline{\hat{s}_1\hat{s}_2} = e_2: \overline{\hat{s}_2\hat{s}_0}$ が成り立つため, 射影三角形は常に相似となる.

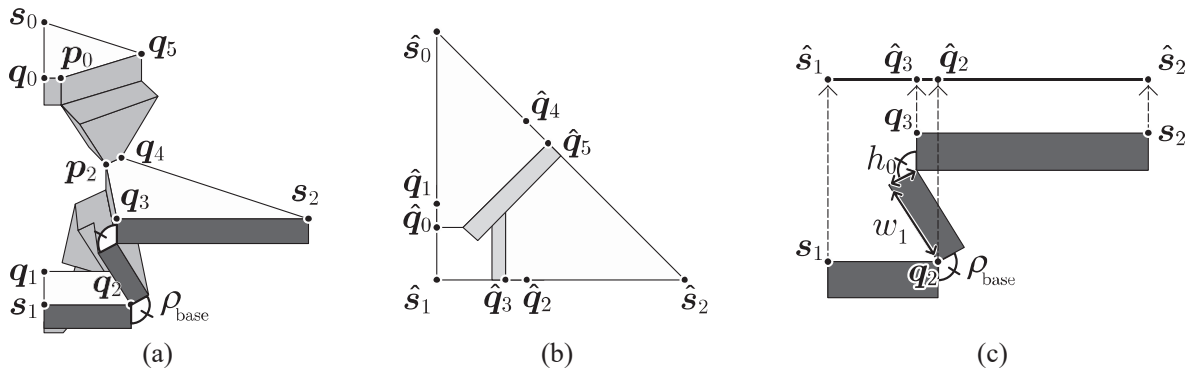


図 8 分子の構造物の折り状態

4.2. 正 n 基本形の構造物の特徴

まず、正 n 基本形の構造物の自由度について論ずる。式 4.2 より、 ρ_{base} が 0 から π になる一様折り状態の連続（折りたたまれる過程）における $\widehat{s}_1\widehat{s}_2$ は、 $\rho_{base} = \text{atan}(h_0/w_1)$ となるまで単調増加し、その後減少に転じることが分かる。構造物は、 $\widehat{s}_1\widehat{s}_2$ の長さが決まれば折り状態が一意に定まる必要があるため、構造物を展開した状態を $\rho_{base} = \text{atan}(h_0/w_1)$ 、折りたたんだ状態を $\rho_{base} = \pi$ と定義する。正 n 基本形の構造物は、この範囲で ρ_{base} の値が変わる場合、自由度 1 である。

正 n 基本形の構造物は、正 n 基本形と同様に構造物同士を接続できる特徴を持つ。接続する 2 枚の構造物は、元となる正 n 基本形が 3.4 項に従って作図され、互いの h_0 が等しい必要がある。この条件を満たす構造物同士は、互いの ρ_{base} の範囲が統一されており、折り線 q_1q_2, q_2q_3 に該当するヒンジを共有するように接続できる。

また、構造物を折りたたむ過程で、パーツ同士が干渉することを確認した。干渉とそれに伴う構造物の変形の例を図 9 に示す。図 9 における実線は、可視のパーツのエッジを示し、灰色は、本来であれば不可視となる領域を含む面 $p_0p_1p_2$ のパーツを示している（8 つの分子が接続しているため、該当するパーツは 8 個ある）。図 9(a) は、折りたたむ過程でパーツ同士が干渉した例である。真上から見ると、灰色のパーツ同士が重なっていることが確認できる。このような場合は、例えば、 d_0, d_2 が大きな構造物を作ることで干渉を回避できる。図 9(b) は、この変形によって干渉を回避した例である。その他、パーツ同士の干渉は、厚みを薄くする、パーツの一部を削る等の操作でも解決できることを確認した。これらの変形の量は数値計算で取得した。干渉のない構造物の解析は、今後の課題とする。

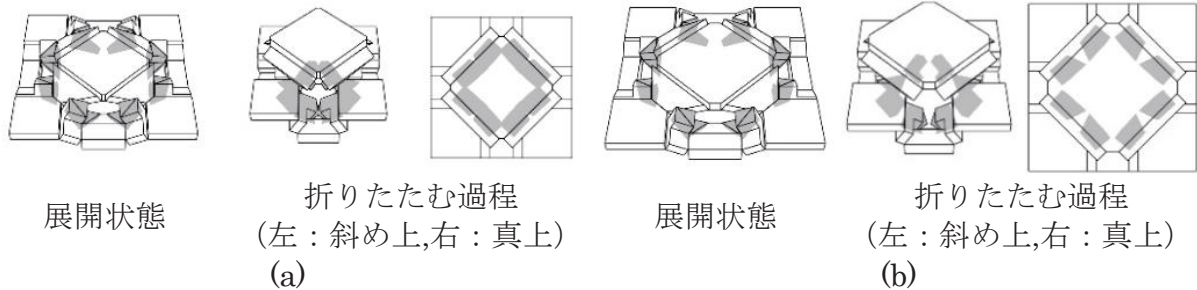


図 9 干渉と基本構造物の変形

5. 作成結果

本節では、提案する展開図ならびに、提案する構造物を作成した結果を示す。まず 5.1 項では、提案する展開図を 3D モデリングソフト Rhinoceros のプラグイン Grasshopper で実装した結果を示す。5.2 項では、実際に 3D プリントした結果を示す。なお、干渉を防ぐための各パラメータは、数値計算によって決定している。

5.1. 展開図と構造物の作成

本項では、提案する展開図を作図した結果（図 10）、ならびに Grasshopper で実装した構造物の折りたたむ様子のアニメーション（図 11）を示す（(a)~(e)はそれぞれ対応している）。(a)(b)(c)は、正 n 基本形の例である。(a)は正 3 角形、(b)(c)は正 6 角形である。(b)(c)に示すように、同じ正 n 角形からでも、パラメータを変えることで異なる正 n 基本

形を作成できる. この内(a)と(c)は接続することができ, (d)のような展開図を作成できる (接続が分かるように, 展開図の一部の基本形の背景を灰色で示す). 異なる正 n 基本形は, 3種類以上であっても(e)のように接続することができる. このように, 正多角形を組み合わせることで, 伸縮機構を持つ構造物を作成できることを確認した.

また, 正多面体の表面が正多角形であることに着目すると, 図 11(f)の立方体, (g)の切頂二十面体のように, 伸縮する立体構造物を作成できることを確認した. ここでは, 分子の線分 s_1q_2 に該当する線分を互いに留継ぎ (接続に用いる縁を斜めに削ぎ, それらの小口を合わせて立体的に接続する手法) することで接続した. なお, 折りたたむ際のパーツの干渉を妨げるため, 収縮率 r の値を十分に小さくするように構造物を作成している. 提案する伸縮機構を持つ立体構造物は, 収縮・拡大することで, 正 n 基本形に囲まれた内側の体積が変化する. 剛体折り可能な閉じた多面体は, 体積を変化させるように折ることができないことがフイゴ定理[2]より知られているが, 本研究の提案する構造物はスリットを含む閉じていない構造であるため, 図のような伸縮機構を持てることを確認した. なお, ここで示す例は, 凸な多面体に限られており, それ以外の多面体へ応用するには, パーツ同士の干渉を防ぐために, 構造物の接続や一部の面の切除が必要になると考えられる. これらの変形方法の考察は, 今後の課題とする.

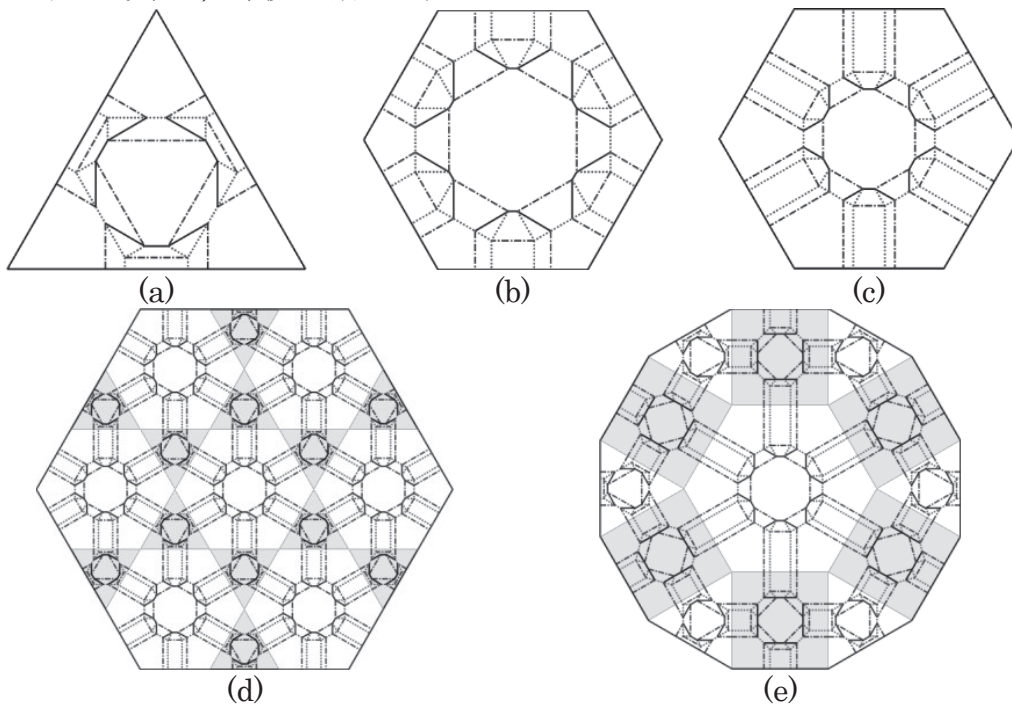


図 10 提案する展開図の作例

5.2. 3D プリント

本研究では, 提案した構造物をアクリル素材で 3D プリントし, その挙動を確認した. 出力した構造物は, 正 3,4 基本形の構造物である (図 12). 3D プリント用のデータは, 3D モデリングで用いたデータに, 筒状のヒンジを組み合わせ, 構造物が一体成型されるように作成した. また, ρ_{base} を成すヒンジの折り角の大きさが, $\text{atan}(h_0/w_1)$ より小さくならないように, 物理的に折り角を制限している. 出力結果より, 作成した構造物を実際に折りた

ためることを確認した. 一方, あるヒンジの折り角を決めても, 構造全体が1自由度で稼働しないことを確認した. 原因として, 稼働のために設けた遊びや, 力が伝播する方向の影響が考えられる. この構造物が, どの程度折り過程を制御しやすいかの検証は, 今後の課題とする.

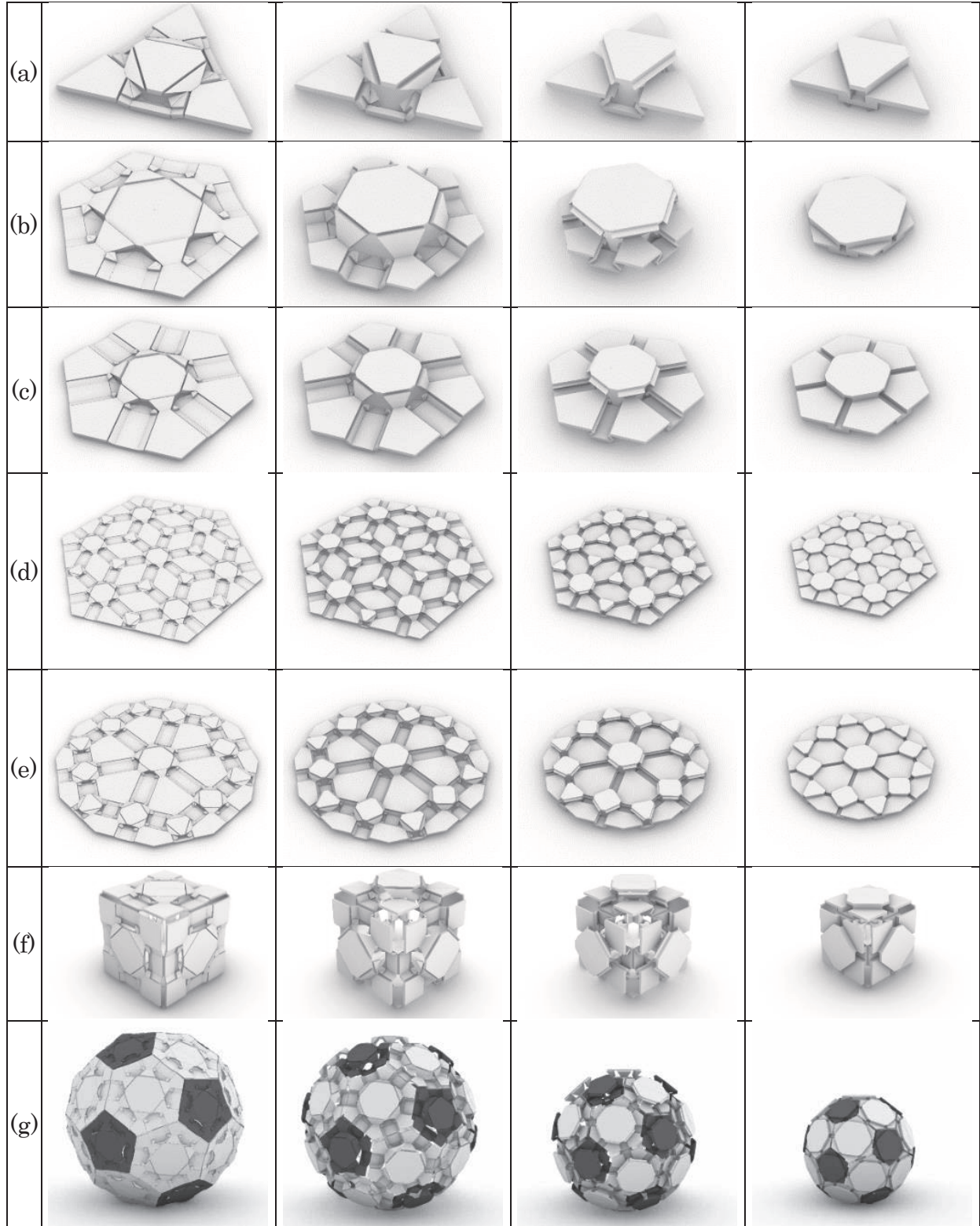


図 11 3D モデリング結果

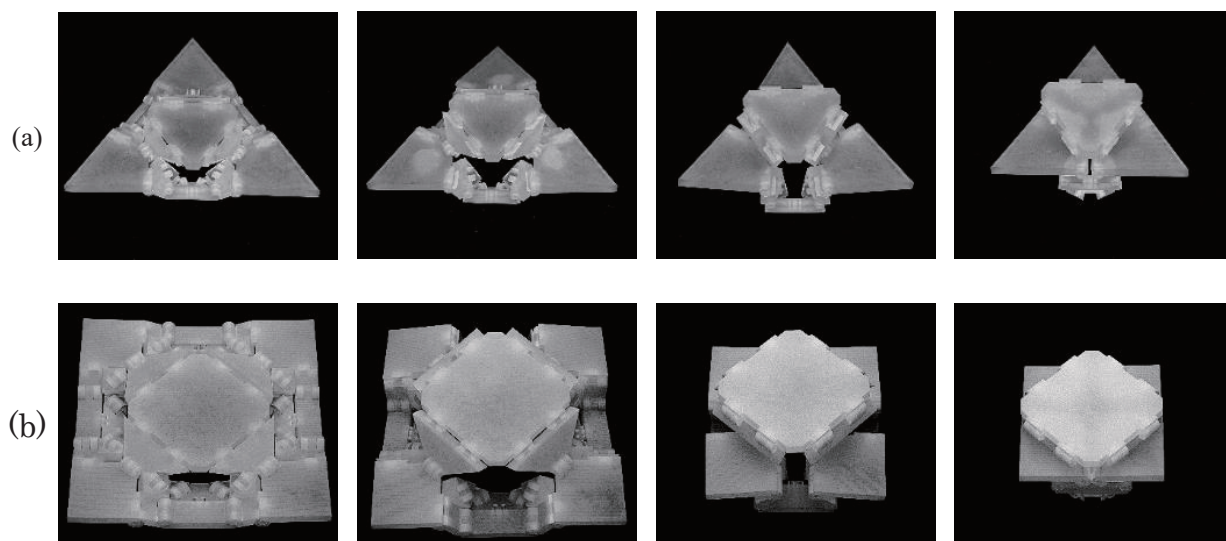


図 12 3D プリントした構造物を折りたたむ過程

6. まとめと今後の課題

本研究では、正多角形を相似な形に折りたたむことができるが剛体折りできない既存の折りパターンにスリットを加えることで、正多角形状で剛体折り可能な展開図を作成した。この折りパターンに厚みを与えることで、1自由度で伸縮する正多角形状の構造物を作成した。正多角形の構造物を平面あるいは立体的に敷き詰めることで、伸縮機構を持つ幾何学的な構造物を作成できることを確認した。今後の課題は、折りたたむ過程で干渉しない最適な形状を解析する方法の提案、理論的には1自由度で折りたためる構造物が実世界ではどの程度折りやすいと言えるかの検証、一般的な多角形への応用である。

本研究は、JSPS 科研費 JP20J10739 の支援を受けたものである

文献

- [1] Miura, K., and Natori, M., “2-D array experiment on board a space flyer unit”, *Space Solar Power Review*, 5.4(1985), 345-356.
- [2] Connelly, R., Sabitov, I., and Walz, A., “The bellows conjecture”, *Beitr. Algebra Geom*, 38.1(1997), 1-10.
- [3] Abel, Z., Cantarella, J., Demaine, E. D., Eppstein, D., Hull, T. C., Ku, J. S., Lang, R. J., and Tachi, T. “Rigid origami vertices: Conditions and forcing sets”, *Journal of Computational Geometry*, 7,1(2016), 171-184.
- [4] Abel, Z., Connelly, R., Demaine, E. D., Demaine, M. L., Hull, T. C., Lubiw, A., and Tachi, T., “Rigid flattening of polyhedra with slits”, *Origami6*, 1(2015), 109-117.
- [5] Chen, Y., Peng, R., and You, Z., “Origami of thick panels”, *Science*, 349.6246 (2015), 396-400.

- [6] Evans, T. A., Lang, R. J., Magleby, S. P., and Howell, L. L., “Rigidly foldable origami gadgets and tessellations”, *Royal Society open science*, 2,9(2015), 150067.
- [7] Evans, T. A., Lang, R. J., Magleby, S. P., and Howell, L. L., “Rigidly foldable origami twists. *Origami*”, *Origami6*, 1(2015), 189-200.
- [8] Demaine, E. D., Demaine, M. L., and Kayhan, F. Q., “Scaling any surface down to any fraction”, *Origami6*. 1(2015), 201-208.
- [9] Lang, R. J., “Spiderwebs, tilings, and flagstone tessellations”, *Origami6*, 1(2015), 189-200.
- [10] Filipov, E. T., Tachi, T., and Paulino, G. H., “Origami tubes assembled into stiff, yet reconfigurable structures and metamaterials”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112.40(2015), 12321-12326.
- [11] Lang, R. J., “Twists, Tilings, and Tessellations”, CRC press, (2018).
- [12] Lang, R. J., Tolman, K. A., Crampton, E. B., Magleby, S. P., and Howell, L. L., “A review of thickness-accommodation techniques in origami-inspired engineering”, *Applied Mechanics Reviews*.70.1(2018)
- [13] Seymour, K., Burrow, D., Avila, A., Bateman, T., Morgan, D. C., Magleby, S. P., and Howell, L. L., “Origami-based deployable ballistic barrier”, *Origami7*, 3(2018), 763-777.