

論文名 Title	折り紙を用いた3次元的手法による 任意の正多角形の作図	Construction of arbitrary regular polygons by three-dimensional method in origami
著者 Author(s)	加藤勇誠, 三谷純	Yusei Kato, Jun Mitani
受理年月日 Date of acceptance	2023/05/15	
掲載 First publish	『折り紙の科学』 (“Science of Origami”) 2023/06/20 Vol. 9 No. 1 page 1-11	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

折り紙を用いた3次元的な手法による 任意の正多角形の作図

加藤 勇誠 (tikuwatokamaboko@gmail.com)
甲陵高等学校, 408-0021 山梨県北杜市長坂町長坂上条 2003

三谷 純 (mitani@cs.tsukuba.ac.jp)
筑波大学, 305-0006 茨城県つくば市天王台 1-1-1

Construction of arbitrary regular polygons by three-dimensional method in origami

Yusei Kato (tikuwatokamaboko@gmail.com)
Koryo High School, 2003 Nagasakakamijho Nagasakacho, Hokuto-city,
Yamanashi 408-0021, Japan

Jun Mitani (mitani@cs.tsukuba.ac.jp)
Univercity of Tsukuba, 1-1-1 Tennohdai, Tsukuba-city,
Ibaraki 305-0006, Japan

要約： 紙を折る操作を用いて、紙の上に作図を行う手法がこれまでに様々に研究され、定規とコンパスでは不可能な正多角形の作図も折り紙では可能なことが知られている。しかし、折りの公理に含まれる折り方で作図できる正多角形は限られ、また折り手順は複雑であり、対象とする正多角形ごとに大いに異なる。本稿では、正多角錐台状の立体形状をはじめに折り出し、そこから正多角形の作図に必要な角度を抽出することで、任意の正多角形を統一的に作図可能な手法を示す。

Abstract: Various methods of drawing on paper using the folding operation have been studied, and it is known that regular polygons, which are impossible with a ruler and compass, can be drawn with origami. However, the regular polygons that can be drawn using the operations included in the axioms of foldings is limited, and the folding procedure varies greatly for different regular polygons, making it complex. In this paper, we present a unified method for drawing arbitrary regular polygons by first making a pyramidal right polygonal frustum, and then extracting the necessary angles for drawing regular polygons from it.

1 はじめに

定規とコンパスを用いた作図によって、四則演算および開平演算が可能である。一方で折り紙による作図に注目すると、折りの公理 [5][6] で示される 7 通りの折り操作の組み合わせにより、四則演算と開平演算に加えて開立演算 (3 乗根を取る操作) までが可能である [11]。この性質を用いることで、角の三等分や正 7 角形の作図など、定規とコンパスでは不可能な作図を折り紙によって実現できることが知られている。しかしながら、正 n 角形を作図するにあたっては、それに必要な情報である中心角 $\frac{2\pi}{n}$ を作図できる必要があり、折りの公理に示される折り操作だけで任意の正多角形を作図できるわけではない。

第 2 節で紹介するように、正多角形を折り紙で作図する方法は様々に研究されてきたが、それらは紙を平坦に折る操作に対象を限定しており、作図のための手順は一般化されておらず煩雑である。本稿では、折り紙の立体構成能力に注目し、折り紙の作図アプローチを三次元に拡張し経路することで正多角形を作図する手法を提案する。提案手法では正多角錐台を折ることを行うが、その詳細は第 3 節および第 4 節で述べる。この手法により、任意の正多角形を統一的な方法で作図することが可能である。第 5 節では、本稿のまとめとともに、残された問題について述べる。

2 折り紙による正多角形の作図

3 以上の自然数 n に対して、 $\cos \frac{2\pi}{n}$ が作図可能であれば中心角 $\frac{2\pi}{n}$ が作図でき、そこから正 n 角形が作図できる。四則演算、開平演算、開立演算の組み合わせでこの値を求めることができる n は、自然数 x, y, k を用いて $n = 2^x 3^y p_1 p_2 \dots p_k$ ($p_1 p_2 \dots p_k$ は自然数 i, j を用いて $2^i 3^j + 1$ で与えられるピアポント素数) で表されるものに限ることが知られている [7][3]。このような n は無数に存在するが、すべての自然数に当てはまるわけではない。作図不可能な正多角形は小さい順に、正 11 角形、正 22 角形、正 23 角形、正 25 角形…と続く。作図可能な正 n 角形に対して、統一的な折り手順が存在するわけではなく、 n の値に応じた折り手順が個別に考案されている。たとえば、正 7 角形と正 9 角形の折り方が Huzita[4] によって示されている。また、正 7 角形を対象とした、計算機を用いた折り手順の可視化と、その手順の妥当性の自動証明が Robu らによってなされている [9]。

折りの公理には含まれない「 n -fold」という複数の折り線を同時に決定するような折り操作を用いると 5 次方程式以上も解けることが知られており [2]、実際に 2-fold 折りを用いた正 11 角形の作図法が Lucero によって示されている [7]。ただしこの手法では、複数の点または直線を同時に扱う必要があり、実際の折り操作で目的の作図を行うことは極めて難しい。

立体を折り出し、それを用いて正多角形を作り出す案は、図 1 に示すように*、過去に笠原によって「正多角形定木」として提案されたものがある。笠原の案では 1 枚の紙で正多角錐を作り、それを他の紙に形を写す定規として使用する。この正多角錐は底面を持たないため変形の自由度があることと、正多角形を折り出すのとは別に、定規を折り出すための紙が必要である点に課題がある。Royo らも同様に正多角錐を折り出し、それにねじり折りを加えることで剛性を保証したものを定規として使用する手法を提案している [10]。本稿で提案する手法では作

*前川淳提供、出版年不明 (1990 年ごろ)

成した正多角錐に対して沈め折りを適用することで剛性を保証している点と、それを構成する紙自身に正多角形を作図する（つまり別の紙を使用しない）という特徴がある。

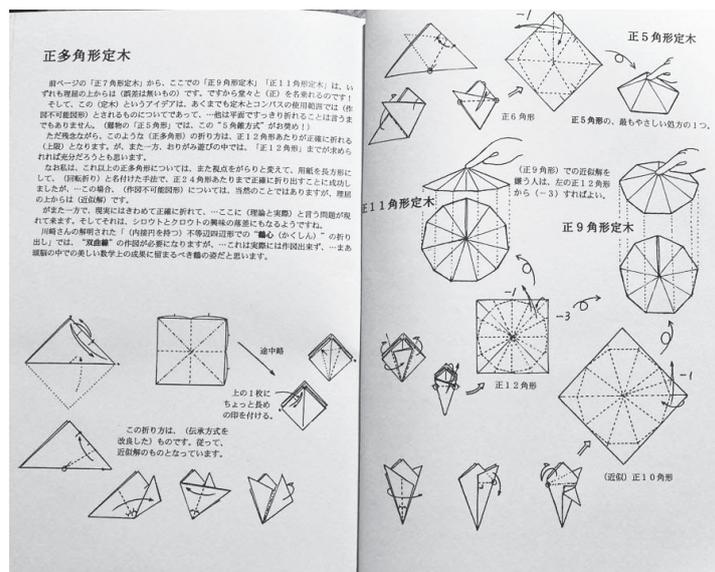


図 1: 正多角形定木を用いた正多角形の作図方法 (笠原邦彦著 『シルバー矩形』より)

3 3次元的アプローチ

折りの角度を 180 度に限定しないことで、立体形状を折り紙で作ることが出来る。このような 3 次元的なアプローチは、折り紙による造形で広く用いられており、折り操作後の形状を平坦なものに限定する従来のアプローチよりも得られる形の自由度が高いという利点がある。提案手法では、正 n 角形を折り出すために、まず正 n 多角錐台を折り出し、対象とする正多角形をその底面で表現することを行う。その際に、沈め折りをを用いることで、折り出される形状が変形の自由度を持たないようにする。以降では、提案手法の詳細を述べる。

3.1 正多角錐の構成

はじめに、正方形の紙 S から正多角錐を折り出すことを考える。一般性を失わずに、正方形の 1 辺の長さは 2 であるものとする。また、正多角錐の辺の数 n が偶数の場合は、 n から素因数 2 を除いたものを作図し、平面に作図したのちに角の 2 等分を繰り返すことで目的の形が得られるため、以降では n が奇数であることを前提として説明を行う。また、ここでは図 3(c) に示すように、正多角錐の側面のみを紙で作るものとし、底面は無い状態を考慮する。

まず、 a を $n \leq 2^a$ を満たす最小の自然数とし（天井関数の表記を用いると $a = \lceil \log_2 n \rceil$ である。）、正 2^a 角形の作図を行う。正多角形の作図条件から、角度 $\frac{2\pi}{2^a}$ の作図可能性を考える必要があるが、折りの公理 3 により、交差する 2 直線に対してそれらを重ね合わせる操作をすることで角の二等分線を作図できることから、これが作図可能であることは明らかである。ここで構成した $\frac{2\pi}{2^a}$ の角度を S の中心に敷き詰め一周させることで、中心を 2^a に等分できる。 S の一辺の長さの半分（長さ 1）を、中心から各分割方向にとり、その点を結ぶことで図 2 のような正 2^a 角形を作図できる。 $n = 2^a$ のときには、これで操作が終了する。以降は、 $n < 2^a$ のときの手順である。

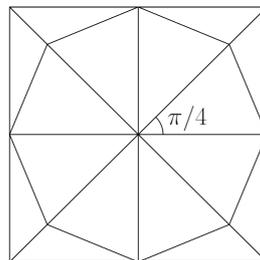
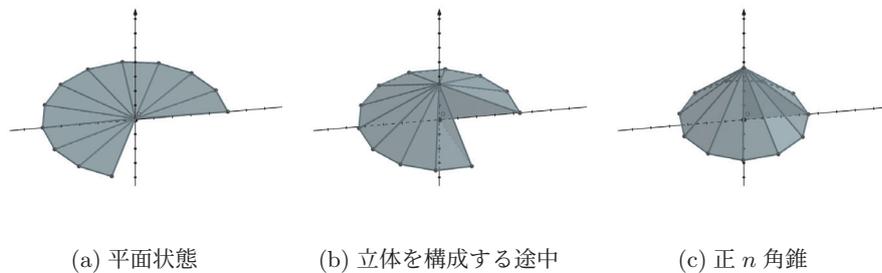


図 2: 正 2^a 角形の作図 ($a = 3$ の例)

図 2 に示される、 S の中心を共有する合同な 2^a 個の二等辺三角形のうち、 n 個を用いて図 3(a)(b)(c) の要領で正 n 角錐を折り出す。図では省略されているが、この際に $2^a - n$ 個の余剰な三角形は角錐の内部に折り込むものとし、後に詳しく記述するが多角形の外側の領域は谷折りによって立体的に折り返しておく。



(a) 平面状態

(b) 立体を構成する途中

(c) 正 n 角錐

図 3: 正 n 角錐の構成

3.2 正 n 角錐の形状の幾何的性質

正 n 角錐の底面を構成する頂点を P_0, P_1, \dots, P_{n-1} とする。 $P_k P_{k+1}$ 間の距離は一定である。また、図 3(a) から (c) に変形する過程で、底面に外接する円の半径は小さくなる。図 3(c) のように側面のみから構成される多角錐には変形の自由度があるが（第 4 節で詳しく述べる）、ここでは各点 P_k は同一平面上にあり、正多角錐を構成しているものとして議論を進める。

図 3(a) に示す平坦な状態が 3 次元直交座標系の xy 平面上に存在するものとし、正 2^a 角形の中心角を θ 、中心位置を原点とすると、図 3(a) における P_k の座標は $(\cos(k\theta), \sin(k\theta), 0)$ で与えられる。図 3(c) に至る過程では、 P_k の乗る円の半径が小さくなることを考慮すると、 P_k の座標は $(r \cos(k\theta), r \sin(k\theta), 0)$, $(0 < r < 1)$ で表すことができる。

以下では図 3(c) の正 n 角錐を構成する幾何学要素の性質について考察する。

【正多角錐の底面多角形の 1 辺の長さ】 正 2^a 角形の中心角 θ は

$$\theta = \frac{2\pi}{2^a} \quad (1)$$

であり、底面に外接する円の半径は 1 であるため、余弦定理により 1 辺の長さは、

$$s = (2 - 2 \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

と表せる (図 4(a),(b))。

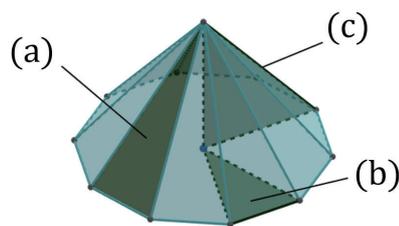
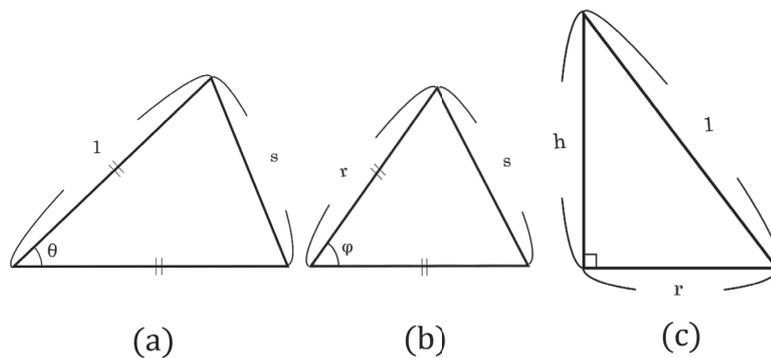


図 4: 正多角錐を構成する三角形

【正多角錐の底面が内接する円の半径】 正多角錐の底面に注目すると、中心角 ϕ は $\frac{2\pi}{n}$ であり、1 辺の長さは式 (2) から変わらず s であるから、内接する円の半

径は余弦定理から

$$r = \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \phi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

と表せる (図 4(b),(c))。

【正多角錐の高さ】 正多角錐の高さ h はピタゴラスの定理より求められる。母線の長さが 1 で、底面の半径が式 (3) の r であるから、

$$\begin{aligned} h &= (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \phi} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる (図 4 (c))。

以上より、正 n 角錐の幾何学的な性質を表す値、 θ, ϕ, s, r, h はすべて変数 n のみを用いて以下のように表すことができ、底面を構成する頂点 P_k の各座標もそれらから算出できる。

3.3 立体沈め折りによる正多角錐の形状の固定

前節で述べた操作で作られた多角錐は (1) 底面となる多角形の全ての辺の長さが等しい、(2) 錐体を構成する全ての母線の長さが等しい、という 2 つの条件のみが満たされている状態である。この場合、底面を構成する頂点 P_i が、角錐の頂点 O を中心とする半径 1 の球面 α 上にある (図 5) という条件を満たしながら移動できるため、多角錐は変形できる (多角錐の底面を構成する頂点を、節点数 n の環状の球面リンク機構を構成するものと見なすことができる)。

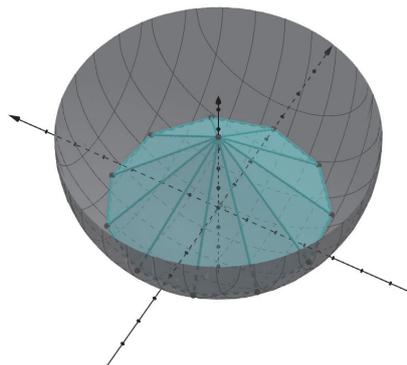


図 5: 底面を構成する頂点が球に内接する様子

前節までは簡明のために正多角錐と呼んでいたが、このように、必ずしも正多角錐の形状が得られるとは限らない。この多角錐の頂点 O のステラジアンが最大

になるときのみ正多角錐となる。このような変形の自由度があると、実際に紙を折ることで作図を行った結果の一意性が保証されない。そこで、この問題を解決するために、正多角錐を底面に平行な面で分割した上部（頂点を含む側）を鏡映反転させる操作によって変形の自由度を無くし、形状を固定することを行う。以降では、この操作を「立体沈め折り」と呼ぶ。このような立体沈め折りによって、多角錐の形状を正多角錐台の状態に固定できることを以降で示す。

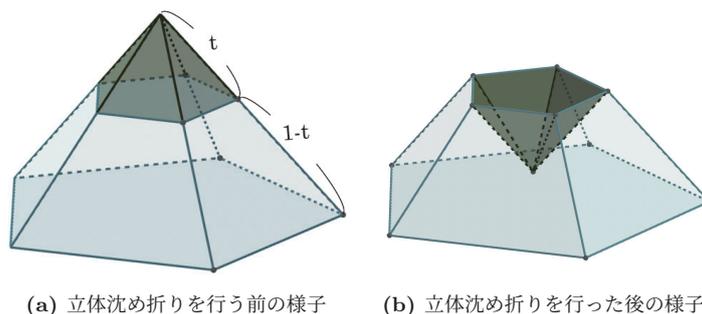


図 6: 立体沈め折り操作

図 6(a) のように、展開図における角錐の母線 OP_k 上に、それを $t : 1-t$ ($0 < t < 1$) に内分する点 P'_k を配置し、それらを線分 $P'_k P'_{k+1}$ で結ぶ ($t = \frac{1}{2}$ とすれば容易に折り出すことができる)。この折り線を用い、角錐 (図 6(a)) の頂点 O を沈め折りすることで、角錐台の形状 (図 6(b)) を作成する (実際の折り操作では、角錐を構成してから上部を押し込むのではなく、図 3 における立体化の時点で上部を折り返した状態に折るのがよい)。

このとき、沈め折りによって反転された側は錐体 C' を成す。 C' の頂点を O' とすると、 C' の底面を構成する頂点 P'_k は O' を中心とする半径 t の球面 β 上に存在する。また一方で、沈め折りする前の状態において P'_k は、錐体の頂点 O を中心とする半径 t の球面 α 上に存在していた。そのため、 P'_k は球面 α と球面 β によって拘束され、この 2 つの球の交差円上に存在する。そのため、 P'_k を結んだ多角形は、半径 rt の円上に定まり、これは正多角形に限られる (図 7)。そして錐体 C' は正多角錐であることもわかる。

一方、元の多角錐は、鏡映反転して得られた正多角錐 C' を、鏡映反転するまえの状態に戻した正多角錐と相似 (相似比 $1 : t$) であるから、元の多角錐も正多角錐に固定されることがわかる。このとき、立体沈め折りをした後の立体 (正多角錐台) の側面は脚の長さが $1-t$ 、上底が rt 、下底が s の等脚台形である。

4 正多角形の作図に必要な角度の抽出

前節では、立体沈め折りを適用することで正 n 角形を底面とする正多角錐台を構成できることを示した。本節では、平面に正 n 角形を折り出すために必要な $\frac{2\pi}{n}$ という角度を、この立体から抽出し平面に写し取る方法を示す。

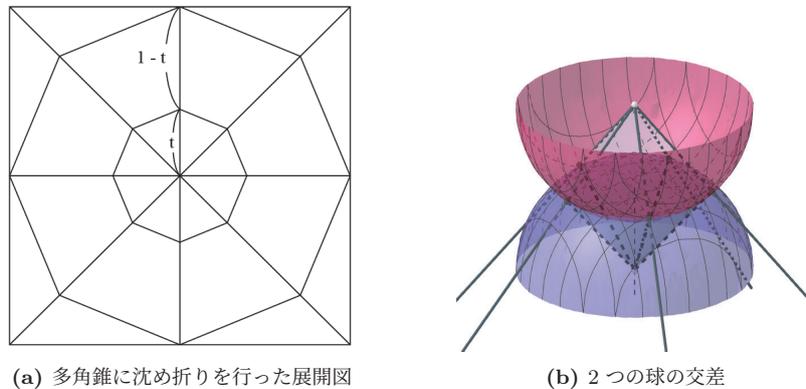


図 7: 立体沈め折りをを行った展開図と 2 つの球の交差

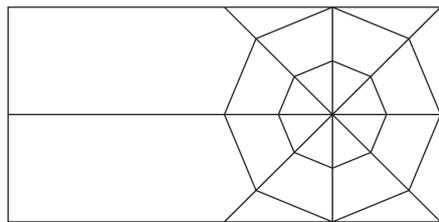
そのための準備として、正方形の対辺を合わせるようにして半分に折ることで $1:2$ の比率をもつ長方形を作成する。この長方形の半分の領域の正方形に対して、前節で述べた正 n 角錐台を折り出すことを行う。その展開図は図 8(a) のようになり、折った後の形は図 8(b) のようになる（角錐台の底部は上に向けて折り返している）。

続いて、図 8(c) の (A)、(B) で示す領域を、その内側に存在する角錐台の側面に重なるように折ることで、紫の三角形で示すヒダを作成し、このヒダを側面に重なるように倒す（倒す方向は左右のどちらでもよいが、図では向かって左側に倒す様子を矢印で示している）。続いて、沈め折りで得られる断面正多角形の辺が乗る直線（図 8(d) の L ）で、ヒダを水平な状態に折り倒す。これは、ヒダを断面正多角形の向かい側の辺にあたるまで倒すことで実現できる。ヒダに隣接する面は直方体の箱のラッピングのときの要領で一緒に折りたたんでしまう。さらに、図 8(e) に示すようにヒダの先端を断面正多角形の向かいの辺が乗る直線（図中の M ）で、反対側の側面に沿って下側へ折り倒す。

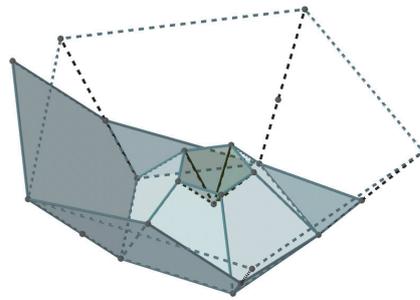
このようにした後で、これをすべて開くと、ヒダに相当する個所に図 8(e) の L および M の 2 辺の折り目がつけられた状態となる。この 2 辺の成す角 θ は、以下の理由から $\frac{\pi}{n}$ である。 n を奇数に限っているため、直線 L から最も離れた位置にある断面多角形の頂点が 1 つ (P) に決まる。 P を通り L に平行な線を置くと、 P における外角 $\frac{2\pi}{n}$ を 2 分した $\frac{\pi}{n}$ が得られる。図 8(f) の角度 θ は、これの錯角であるから、この値も同じ $\frac{\pi}{n}$ である。

直線 L と M の交点を Q とし、この点を元の紙の中心を重ねるように折ることで、紙の中心に角度 $\frac{\pi}{n}$ を写し取ることができる。この 2 倍角である $\frac{2\pi}{n}$ が正 n 角形の中心角であるから、この角度を紙の中心周りに一周させて複製し、中心から同一距離にある点を取ってそれらを結ぶことで正 n 角形を構成できる。

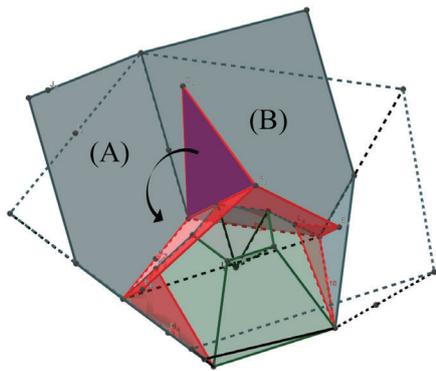
以上が 1 枚の紙を用い、正多角錐台を折り出すことを経由して正 n 角形を折り出す手順である。



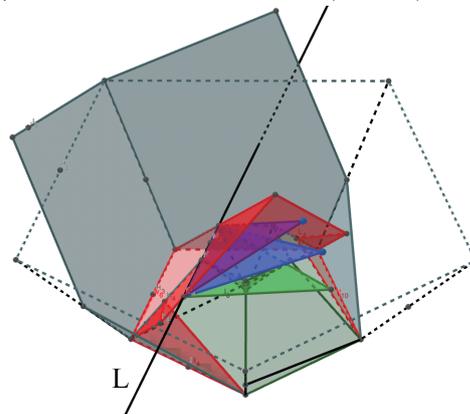
(a) 長方形から正角錐台を折り出す展開図



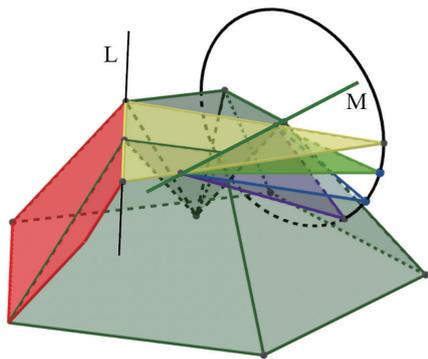
(b) 沈め折りを底部にも適用した状態 (一部省略)



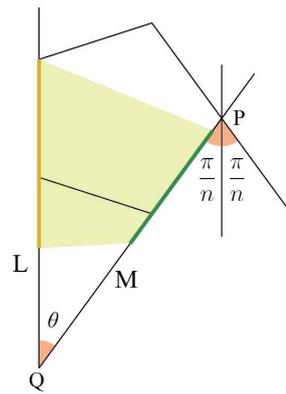
(c) ヒダの折り出し



(d) 断面正多角形の辺を軸とする回転動作



(e) 断面正多角形の辺での折り倒し



(f) 二辺のなす角

図 8: 2次元への投影

5 まとめと今後の課題

正多角錐台という立体形状を折り出す操作を経由することで、任意の正多角形を1枚の紙から作図する手法の提案を行った。その際に用いた「立体沈め折り」による剛性の保証は、底面の無い任意の凸角錐の剛体化手法としても有用となりうる。

また、任意の正多角形を作図できることは、紙を複素平面と見た時に任意の自然数 n に対して、1 の n 乗根を座標として作図できることに相当する。従って、本稿で用いた手法では、1 の冪根と有理数を用いた四則演算で表せる数が作図可能である。これらのより精密な議論は Royo らによってなされている [10]。また、本稿で提案するような立体形状を含む折り方についてより厳密に議論するためには、平坦折り紙における折りの公理に相当する、立体的に折る操作の公理を定める必要がある。提案手法では、面と面が重なるように折る操作、面が辺に重なるように折る操作などが含まれるため、これらを含む折り操作の形式的な扱いが今後の課題といえる。

提案手法における n の値に依存する折りの手順は、はじめの正 2^a 角形 ($a = \lceil \log_2 n \rceil$) の作図と角度の抽出、そして最後の正 n 角形の作図であり、その他の折り操作は定数回である。正 2^a 角形は中心を2等分する折り方を a 回繰り返し、辺を作る操作を1回行ってから開くことで作図できるため、 $a+1$ 回の折り操作で可能である。角度を抽出した後正 n 角形の輪郭を作図する操作は、 n の定数倍の操作で実現できる。以上のことから、提案手法で正 n 角形を折り出すために必要な折り操作は $O(n)$ の折り回数であると言える。折り回数の最小値に対するより精密な議論のためには、立体的に折る操作に対する折り回数の数え方を定める必要があるため、これは今後の課題である。

参考文献

References

- [1] Alperin, R. C., A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers, *New York Journal of Mathematics*, 6, 119-133 (2000).
- [2] Alperin, R. C., and Lang, R. J., One-, two-, and multi-fold origami axioms, *Origami 4 - Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*, 371-393 (2006).
- [3] Gleason, A. M., Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon, *The American Mathematical Monthly*, 95(3), 185-194 (1988).
- [4] Huzita, H., Drawing the regular heptagon and the regular nonagon by origami (paper folding), *Symmetry: Culture and Science*, 5(1), 69-84 (1994).
- [5] Huzita, H., Axiomatic Development of Origami Geometry, *Proc. of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Italy, Ferrara, 143-158 (1989).

- [6] Justin, J., Résolution Par Le Pliage De L'équation Du Troisième Degré Et Applications Géométriques, *Proc. of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Italy, Ferrara, 251-261 (1989).
- [7] Lucero, J. C., Construction of a regular hendecagon by two-fold origami, *Cruz Mathematicorum*, 44, 207-213 (2018).
- [8] Lucero, J. C., Geometric solution of a quintic equation by two-fold origami, *International Journal of Geometry*, 7, 61-68 (2018).
- [9] Robu, J., Ida, T., Tepeanu, D., Takahashi, H., and Buchberger, B, Computational Origami Construction of a Regular Heptagon with Automated Proof of Its Correctness, *Automated Deduction in Geometry*, 19-33 (2004).
- [10] Royo, J; and Tramuns, E., Abelian and non-abelian numbers via 3D origami Origami 6. I. Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 45-54 (2015).
- [11] 阿部 恒, すごいぞ折り紙 – 折り紙の発想で幾何を楽しむ, 日本評論社 (2003). (初出: “数学セミナー” 1980年7月号表紙).
- [12] 森継 修一, 折り紙による3次方程式の解法について, 日本応用数理学会論文誌, 16(1), 79-92 (2006).