

論文名 Title	芳賀定理の正 $2n$ 角形への拡張	The Extension of Haga's Theorems to Regular $2n$ -gons
著者 Author(s)	高野航輔、加藤勇誠	Kosuke Takano, Yusei Kato
受理年月日 Date of acceptance	2026/01/20	
掲載 First publish	『折り紙の科学』（"Science of Origami"）2026/01/23 Vol. 10 No. 1 page 1-12	
備考 Note		

日本折紙学会
Japan Origami Academic Society
www.origami.jp

芳賀定理の正 $2n$ 角形への拡張

高野 航輔

長岡高等学校

940-0041, 新潟県長岡市学校町 3 丁目 14-1

tknkusk24@gmail.com

加藤 勇誠

京都大学

606-8501, 京都府京都市左京区吉田本町

kato.yusei.33a@st.kyoto-u.ac.jp

The Extension of Haga's Theorems to Regular $2n$ -gons

Kosuke Takano

Nagaoka High School

14 -1 Gakkochō, Nagaoka-city, Niigata 940-2111, Japan

Yusei Kato

Kyoto University

Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

要約：本稿では，正方形の折り紙に関する定理として知られる「芳賀定理」を，正 $2n$ 角形 ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) の場合へ拡張し，初等幾何学によるアプローチで証明する．また、「芳賀第 2 定理」には 2 種類の折り方が存在することを示し，一方を「芳賀第 2 定理 I」，もう一方を「芳賀第 2 定理 II」と命名することを提案する．

Abstract: In this paper, we extend “Haga’s theorem,” known as a theorem concerning square origami, to the case of regular $2n$ -gons ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) and present a proof based on elementary geometry. We also show that “Haga’s second theorem” has two distinct folding methods, and propose naming one “Haga Second Theorem I” and the other “Haga Second Theorem II.”

Keywords: Origami, Haga’s theorems, Origamics, regular polygon, Regular $2n$ -gons

1 はじめに

オリガミクス (Origamics) は芳賀和夫氏によって提唱された概念であり，折り返し操作による作図可能性や幾何学的性質を探究する分野として発展してきた．その中で芳賀定理は，同氏によって発案された折り紙数学における代表的な一連の定理であり，第 1 定理，第 2 定理，第 3 定理の 3 種類から構成される．以下にそれらを示す (定理 1.1, 定理 1.2, 定理 1.3, 図 1)．

定理 1.1 (芳賀第 1 定理). 正方形 $ABCD$ の折り紙があり，辺 AD の中点を M とする．点 B を点 M に重ねるように折り線 f で折り，このとき点 C が折り返された点を C' とする．直線 CD と直線 MC' の交点を Y とすると， Y は線分 DC を $2:1$ に内分する．

定理 1.2 (芳賀第 2 定理). 正方形 $ABCD$ の折り紙があり, 辺 AD の中点を M とする. 点 M と点 B を通る直線で折り, このとき点 A が折り返された点を A' とする. 次に, 点 C を点 A' に重ねるように折り線 f で折り, 折り線 f と直線 CD の交点を Y とする. このとき点 Y は線分 DC を $2:1$ に内分する.

定理 1.3 (芳賀第 3 定理). 正方形 $ABCD$ の折り紙があり, 辺 AD の中点を M とする. 点 M が直線 AB 上に乗ると同時に点 B が直線 CD 上に乗るように折り線 f で折り, 点 A, B が折り返された点をそれぞれ A', Y とする. このとき点 Y は線分 DC を $2:1$ に内分する.

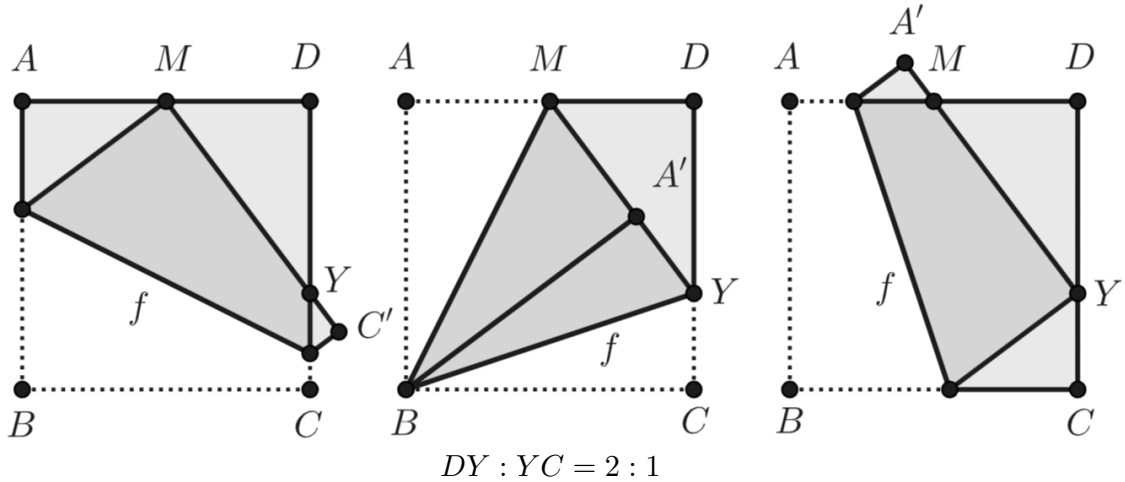


図 1: 定理 1.1 (左), 定理 1.2 (中央), 定理 1.3 (右)

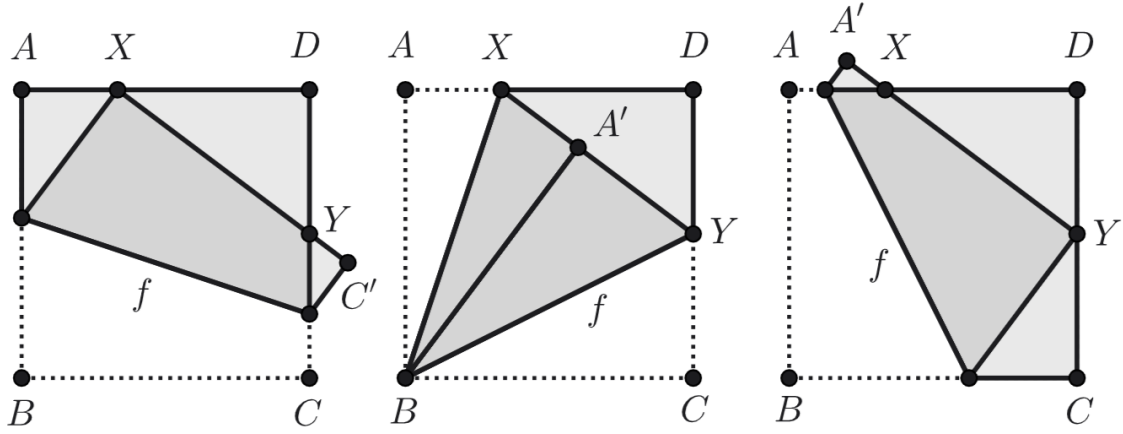
これらはいずれも, 正方形の折り紙の一边に対して中点を起点とする異なる折り操作を行っているが, いずれの操作も一边を $2:1$ に内分する点を得る. この共通性は, 折り紙を介して正方形に内在する数理的構造の美しさを端的に示している. また, 芳賀定理は起点が中点に限らない場合の一般化が知られている [1]. 以下の 3 つの定理が一般化された芳賀定理である (定理 1.4, 定理 1.5, 定理 1.6, 図 2).

定理 1.4 (芳賀第 1 定理 (一般化)). 正方形 $ABCD$ の折り紙があり, 辺 AD を $a:b$ に内分する点 X がある. 点 B を点 X に重ねるように折り線 f で折り, このとき点 C が折り返された点を C' とする. 直線 BC と直線 XC' の交点を Y とすると, Y は線分 DC を $2a:b$ に内分する.

定理 1.5 (芳賀第 2 定理 (一般化)). 正方形 $ABCD$ の折り紙があり, 辺 AD を $a:b$ に内分する点 X がある. 点 X と点 B を通る直線で折り, このとき点 A が折り返された点を A' とする. 次に, 点 C を点 A' に重ねるように折り線 f で折り, 折り線 f と直線 CD の交点を Y とする. このとき点 Y は線分 DC を $2a:b$ に内分する.

定理 1.6 (芳賀第 3 定理 (一般化)). 正方形 $ABCD$ の折り紙があり, 辺 AD を $a:b$ に内分する点 X がある. 点 X が直線 AB 上に乗ると同時に点 B が直線 CD 上に乗るように折り線 f で折り, 点 A, B が折り返された点をそれぞれ A', Y とする. このとき点 Y は線分 DC を $2a:b$ に内分する.

芳賀定理は, 折り紙が正方形の場合についてのみ成立が言及されていた. より一般的な多角形, 特に正方形以外の正多角形においても類似の性質が成り立つかどうかは, これまで明らかにされていなかった.



$$AX : XD = a : b \text{ のとき, } DY : YC = 2a : b$$

図 2: 定理 1.4 (左), 定理 1.5 (中央), 定理 1.6 (右)

本稿では、芳賀第 1 定理、第 2 定理、第 3 定理をそれぞれ正 $2n$ 角形へ拡張し、正方形の場合と同様の線分比に内分する点が得られることを示す (定理 3.4, 定理 3.5, 定理 4.3, 定理 4.4). また、第 2 定理については 2 種類の折り方が存在することを示す (定理 4.3, 定理 4.4).

第 3 節および第 4 節で後述するように、[1] で示された芳賀定理 (定理 1.4, 定理 1.5, 定理 1.6) は、本稿で正 $2n$ 角形へ拡張した芳賀定理 (定理 3.4, 定理 3.5, 定理 4.3, 定理 4.4) における $n = 2$ の特別な場合である.

2 準備

本節では、拡張した芳賀定理の証明に先立ち、必要となる準備を行う. まず、[2, 3] における定義を参考にし、本稿で用いる有向角および有向長を定義する. 続いて証明において重要な補題 (補題 2.4) を述べる. なお、本稿の証明では、円周角の性質および正 $2n$ 角形の対称性から直ちに従う性質 (例えば辺や対角線の平行関係) を頻繁に用いるが、それらは特に断らずに用いる.

定義 2.1. 平面上に半直線 OA, OB がある. 半直線 OA を O を中心として反時計回りに θ 回転することで半直線 OB に重なるとき、符号付き角度 (有向角) を $\theta = \angle AOB$ と表す. また、その絶対値を $\angle AOB = |\angle AOB|$ と表す.

定義 2.2. 平面上に 6 点 A, B, C, D, E, F がある. $\angle ABC - \angle DEF$ が 180° の整数倍であるとき、

$$\angle ABC \equiv \angle DEF \pmod{180^\circ}$$

と書く. また、 $\angle ABC - \angle DEF$ が 360° の整数倍であるとき、

$$\angle ABC \equiv \angle DEF \pmod{360^\circ}$$

と書く.

定義 2.3. 4 点 A, B, C, D があり、線分 AB と線分 CD は平行であるか、または 4 点 A, B, C, D は共線であるとする. 点 A から点 B への向きと、点 C から点 D への向きが一致するとき、比 $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ は正であるとし、反対であるとき、比 $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ は負であるとする.

定義より、共線である 3 点 A, B, C において、 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a}{b}$ のとき、 $\frac{a}{b}$ が正ならば点 B は線分 AC を $a:b$ に内分する点であり、 $\frac{a}{b}$ が負ならば点 B は線分 AC を $a:b$ に外分する点である。

補題 2.4. 正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ において、直線 A_1A_{2n} 上に $A_1X \neq A_1A_2$ かつ $X \neq A_1$ なる点 X があり、 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XA_{2n}}} = \frac{a}{b}$ を満たしている。直線 $A_{n+2}A_{n+1}$ 上にあり $\angle XA_2Y \equiv \angle A_1A_2A_{n+2} \pmod{180^\circ}$ を満たす点を Y とすると、 $\frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{2a}{b}$ が成り立つ。(図 3)

証明. 点 X から直線 A_2A_{2n} におろした垂線の足を B 、直線 BX と直線 A_1A_2 の交点を C とする。正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ に円が外接することに注意すると

$$\angle CA_2B \equiv \angle A_1A_2A_{2n} \equiv \angle A_{n+2}A_2A_{n+1} \pmod{180^\circ}.$$

線分 A_2A_{n+2} は正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ の外接円の直径であるから

$$\angle A_2BC \equiv 90^\circ \equiv \angle A_2A_{n+1}A_{n+2} \pmod{180^\circ}.$$

よって三角形 CA_2B と三角形 $A_{n+2}A_2A_{n+1}$ は A_2 を中心とする回転相似である。また、

$$\angle BA_2A_{n+1} \equiv \angle A_{2n}A_2A_{n+1} \equiv \angle A_1A_2A_{n+2} \equiv \angle XA_2Y \pmod{180^\circ}$$

であるから

$$\begin{aligned} \angle XA_2B &\equiv \angle XA_2A_{n+1} - \angle BA_2A_{n+1} \\ &\equiv \angle XA_2A_{n+1} - \angle XA_2Y \\ &\equiv \angle YA_2A_{n+1} \pmod{180^\circ}. \end{aligned}$$

これと、

$$\angle XBA_2 \equiv 90^\circ \equiv \angle A_2A_{n+1}Y \pmod{180^\circ}$$

であることから、三角形 XA_2B と三角形 YA_2A_{n+1} は A_2 を中心とする回転相似である。したがって、線分 CB を線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ にうつす回転相似によって点 X は点 Y にうつされる。ゆえに

$$\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}}$$

が従う。

直線 A_1A_{2n} 上にある点で、 $DC \parallel A_2A_{2n}$ を満たす点を D とする。三角形 $A_1A_2A_{2n}$ は $A_1A_2 = A_1A_{2n}$ の二等辺三角形であり、 $DC \parallel A_2A_{2n}$ より三角形 $A_1A_2A_{2n}$ と三角形 A_1CD は相似であるから、 $A_1C = A_1D$ である。これと三角形 CDX は $\angle XCD = 90^\circ$ の直角三角形であることから点 A_1 は線分 DX の中点であることが従う。よって $\frac{\overline{DX}}{\overline{A_1X}} = 2$ である。したがって

$$\frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{XA_{2n}}} = \frac{2\overline{A_1X}}{\overline{XA_{2n}}} = \frac{2a}{b}.$$

□

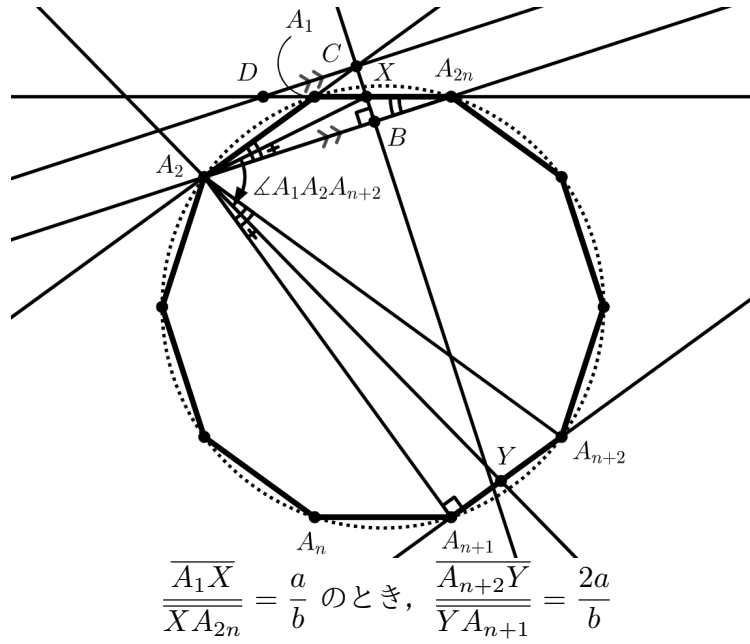


図 3: 補題 2.4

3 芳賀第 1 定理と第 3 定理の拡張

この節では、正 $2n$ 角形に拡張した芳賀第 1 定理（定理 3.4）および第 3 定理（定理 3.5）を述べ、証明する。

補題 3.1. $AB \neq AC$ なる三角形 ABC があり、線分 BC の垂直二等分線を l とする． $\angle A$ の内角の二等分線と l の交点を D ， $\angle A$ の外角の二等分線と l の交点を E とする．このとき、5 点 A, B, C, D, E は共円である．（図 4）

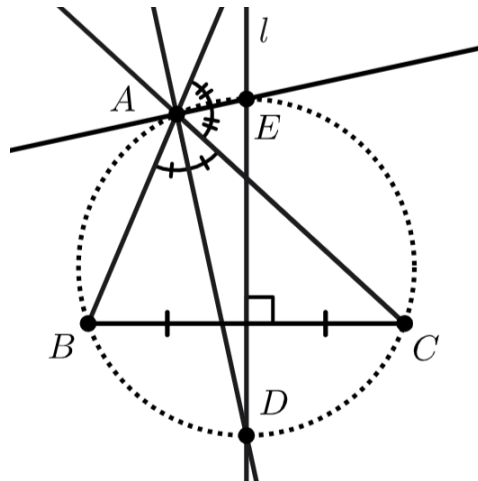


図 4: 補題 3.1

証明. 直線 l と円 ABC の交点のうち、直線 BC に関して点 A と反対側にある点を D' ，点 A と同じ側にある点を E' とする．

点 D' が $\angle A$ の内角の二等分線上にあることを示す．点 D' は線分 BC の垂直二等分線上にあるから， $BD' = CD'$ である．ゆえに $\angle D'BC = \angle BCD'$ を得る．よって

$$\angle BAD' = \angle BCD' = \angle D'BC = \angle D'AC.$$

したがって点 D' が $\angle A$ の内角の二等分線上にあることが示された．ゆえに， $D' = D$ である．

点 E' が $\angle A$ の外角の二等分線上にあることを示す．線分 $D'E'$ は円 ABC の直径であるから， $\angle E'AD' = 90^\circ$ である．

$AB < AC$ のとき

$$\angle E'AC = \angle E'AD' - \angle CAD' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

$AB > AC$ のとき

$$\angle E'AB = \angle EAD' - \angle BAD' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

したがって点 E' は $\angle A$ の外角の二等分線上にある．ゆえに， $E' = E$ である．

点 D' と点 E' の定義より，5 点 A, B, C, D', E' は共円である．したがって，5 点 A, B, C, D, E は共円である． $\square$

補題 3.2. 正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ において，直線 A_1A_{2n} 上に $A_1X \neq A_1A_2$ かつ $X \neq A_1$ なる点 X があり， $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XA_{2n}}} = \frac{a}{b}$ を満たしている．線分 A_2X の垂直二等分線を l とし，直線 l に関して点 A_n, A_{n+1} と対称な点をそれぞれ A'_n, A'_{n+1} とする．直線 $A_{n+1}A_{n+2}$ と直線 $A'_nA'_{n+1}$ の交点を Y とするとき

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{2a}{b} \\ \text{(b)} \quad & \frac{\overline{A'_nY}}{\overline{YA'_{n+1}}} = \frac{2a^2 + 2ab + b^2}{ab} \end{aligned}$$

が成り立つ．(図 5)

証明. 直線 l に関して Y と対称な点を Y' とし， l と直線 $A_1A_2, A_1A_{n+1}, A_{n+2}A_{n+1}$ との交点をそれぞれ B, C, D とする．点 Y は直線 $A'_nA'_{n+1}$ 上にあるから，点 Y' は直線 A_nA_{n+1} 上にある． $A_2B \parallel YD$ であるから， $XB \parallel Y'D$ である．これと $BA_1 \parallel DA_{n+1}$ ， $A_1X \parallel A_{n+1}Y'$ より，点 C は三角形 A_1XA_2 を三角形 $A_{n+1}Y'Y$ にうつす相似拡大の中心であることが従う．特に 3 直線 A_1A_{n+1}, BD, XY' は点 C で交わる．ゆえに 3 点 X, C, Y' は共線である．直線 l に関して X は A_2 と， Y' は Y とそれぞれ対称な点であり， C は l 上の点であるから，点 A_2, C, Y は共線である．

いま， $A_1X \neq A_1A_2$ であり，点 X が点 A_1 に関して点 A_{2n} と同じ側にあるとき直線 A_1C は $\angle A_2A_1X$ の内角の二等分線であり，点 X が点 A_1 に関して点 A_{2n} と同じ側でないとき直線 A_1C は $\angle A_2A_1X$ の外角の二等分線である．いずれの場合も三角形 A_1XA_2 において補題 3.1 を適用することで，4 点 A_1, X, A_2, C が共円であることが従う．したがって

$$\angle XA_2Y \equiv \angle XA_2C \equiv \angle XA_1C \equiv \angle A_{2n}A_1A_{n+1} \equiv \angle A_1A_2A_{n+2} \pmod{180^\circ}$$

が得られ，補題 2.4 より (a) が従う．

直線 CY' と直線 A_2A_n の交点を E とし、直線 A_2A_n と直線 A_1A_{2n} の交点を A'_{2n} とする。このとき、 $\frac{\overline{A'_{2n}A_1}}{\overline{A_1A_{2n}}} = 1$ である。

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{A'_{2n}A_1}}{\overline{A_1X}} = \frac{a+b}{a}, \quad \frac{\overline{CX}}{\overline{Y'C}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_{n+1}C}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_{n+1}Y}} = \frac{2a+b}{b}$$

が従うから、

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'_nY}}{\overline{YA'_{n+1}}} &= \frac{\overline{A_nY'}}{\overline{Y'A_{n+1}}} \\ &= \frac{\overline{EY'}}{\overline{Y'C}} \\ &= \frac{\overline{EC} + \overline{CY'}}{\overline{Y'C}} \\ &= \frac{a+b}{a} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{Y'C}} - 1 \\ &= \frac{a+b}{a} \cdot \frac{2a+b}{b} - 1 \\ &= \frac{2a^2 + 2ab + b^2}{ab} \end{aligned}$$

が得られ、(b) が従う。

以上より題意は示された。 □

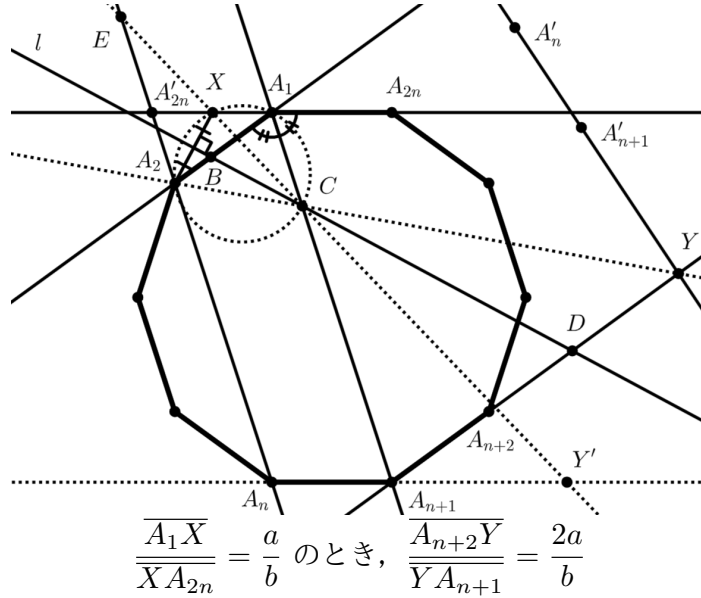


図 5: 補題 3.2

系 3.3. 補題 3.2 において、点 X が線分 A_1A_{2n} を内分する点であることと、点 Y が線分 $A_{n+1}A_{n+2}$ を内分する点であることは同値である。

証明. 点 X が線分 A_1A_{2n} を内分する点であることと $\frac{a}{b}$ が正であることは同値であり, 点 Y が線分 $A_{n+1}A_{n+2}$ を内分する点であることと $\frac{2a}{b}$ が正であることは同値である. いま, $\frac{a}{b}$ が正であることと $\frac{2a}{b}$ が正であることは同値であるから, 題意は示された. $\square$

定理 3.4 (芳賀第 1 定理 (正 $2n$ 角形)). 正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ の折り紙があり, 線分 A_1A_{2n} を $a:b$ に内分する点 X がある. 点 A_2 を点 X に重ねるように折り線 f で折り, このとき点 A_n, A_{n+1} が折り返された点をそれぞれ A'_n, A'_{n+1} とする. 直線 $A_{n+1}A_{n+2}$ と直線 $A'_nA'_{n+1}$ の交点を Y とすると, 点 Y は開線分 $A'_nA'_{n+1}$ 上にあり, 線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ を $2a:b$ に内分する. (図 6)

証明. 折り線 f は線分 A_2X の垂直二等分線であるから, 補題 3.2 より $\frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{2a}{b}$ が従

う. $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XA_{2n}}} = \frac{a}{b}$ は正であるから, $\frac{2a}{b}$ は正である. したがって, 点 Y が線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ を $2a:b$ に内分することが示された.

点 Y が開線分 $A'_nA'_{n+1}$ 上にあることを示す. これは, $ab > 0$ であるから補題 3.2 (b) より

$$\frac{\overline{A'_nY}}{\overline{YA'_{n+1}}} = \frac{2a^2 + 2ab + b^2}{ab} = \frac{a^2 + (a+b)^2}{ab} > 0$$

が得られることから従う.

以上より, 題意は示された. $\square$

定理 3.5 (芳賀第 3 定理 (正 $2n$ 角形)). 正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ の折り紙があり, 線分 A_1A_{2n} を $a:b$ に内分する点 X がある. 点 X が直線 A_1A_2 上に乗ると同時に点 A_n が直線 $A_{n+1}A_{n+2}$ 上に乗るように折り線 f で折り, 点 A_1, A_2, A_n が折り返された点をそれぞれ A'_1, A'_2, Y とする. $A'_2 \neq A_{2n}$ のとき, 点 X は開線分 $A'_1A'_2$ 上にあり, 点 Y は線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ を $2a:b$ に内分する. (図 7)

証明. 折り線 f は線分 A_nY の垂直二等分線である. 点 X は線分 A_1A_{2n} 上にあるから, 正 $2n$ 角形 $A_{n+1}A_n\dots A_{n+2}$ において系 3.3 を適用することで, 点 Y は線分 $A_{n+1}A_{n+2}$ を内分する点であることが従う.

よって, 正 $2n$ 角形 $A_{n+1}A_n\dots A_{n+2}$ において定理 3.4 を適用することで,

$$\frac{b}{a} = \frac{\overline{A_{2n}X}}{\overline{XA_1}} = \frac{\overline{2A_{n+1}Y}}{\overline{YA_{n+2}}}$$

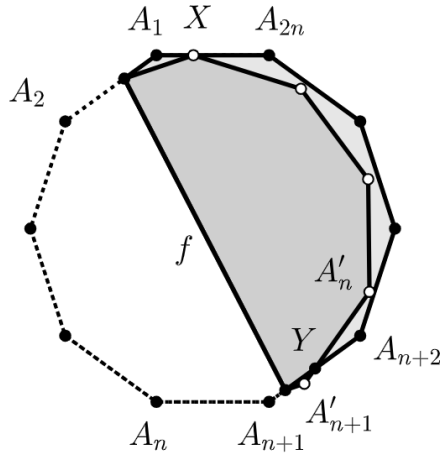
すなわち

$$\frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{2a}{b}$$

を得る. したがって点 Y は線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ を $2a:b$ に内分することが示された.

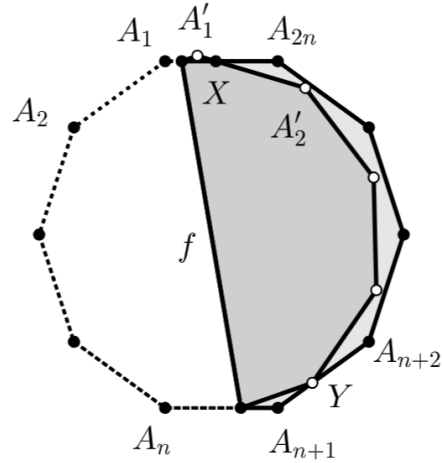
いま, 点 Y は線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ を内分する点であるから, 再び正 $2n$ 角形 $A_{n+1}A_n\dots A_{n+2}$ において定理 3.4 を適用することで, 点 X が開線分 $A'_1A'_2$ 上にあることが従う.

以上により, 題意は示された. $\square$



$$\begin{aligned} A_1X : XA_{2n} &= a : b \text{ のとき,} \\ A_{n+2}Y : YA_{n+1} &= 2a : b \end{aligned}$$

図 6: 定理 3.4



$$\begin{aligned} A_1X : XA_{2n} &= a : b \text{ のとき,} \\ A_{n+2}Y : YA_{n+1} &= 2a : b \end{aligned}$$

図 7: 定理 3.5

定理 3.4 において $n = 2$ の場合を考えると、これは正方形の芳賀第 1 定理 (定理 1.4) において点 A, B, C, D がそれぞれ点 A_1, A_2, A_3, A_4 に置き換わったものである。したがって、定理 3.4 は定理 1.4 の拡張といえることができる。同様の理由により、定理 3.5 は正方形の芳賀第 3 定理 (定理 1.6) の拡張といえることができる。

4 芳賀第 2 定理の 2 種類の拡張

この節では、正 $2n$ 角形に拡張した 2 種類の芳賀第 2 定理 (定理 4.3, 定理 4.2) を述べる。

補題 4.1. 正 $2n$ 角形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ において、直線 A_1A_{2n} 上に $A_1X \neq A_1A_2$ かつ $X \neq A_1$ なる点 X があり、 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XA_{2n}}} = \frac{a}{b}$ を満たしている。直線 A_2X に関して A_1 と対称な点を A'_1 とし、線分 A'_1A_3 の垂直二等分線と直線 $A_{n+1}A_{n+2}$ の交点を Y とするとき、 $\frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{2a}{b}$ が成り立つ。(図 8)

証明.

$$2\angle XA_2A'_1 \equiv \angle A_1A_2A'_1, \quad 2\angle YA_2A_3 \equiv \angle A'_1A_2A_3 \pmod{360^\circ}$$

であるから

$$\begin{aligned} 2\angle XA_2Y &\equiv 2(\angle XA_2A'_1 + \angle A'_1A_2Y) \\ &\equiv \angle A_1A_2A'_1 + \angle A'_1A_2A_3 \\ &\equiv \angle A_1A_2A_3 \\ &\equiv 2\angle A_1A_2A_{n+2} \pmod{360^\circ}. \end{aligned}$$

したがって、

$$\angle XA_2Y \equiv \angle A_1A_2A_{n+2} \pmod{180^\circ}$$

が従う。よって補題 2.4 より題意が従う。 $\square$

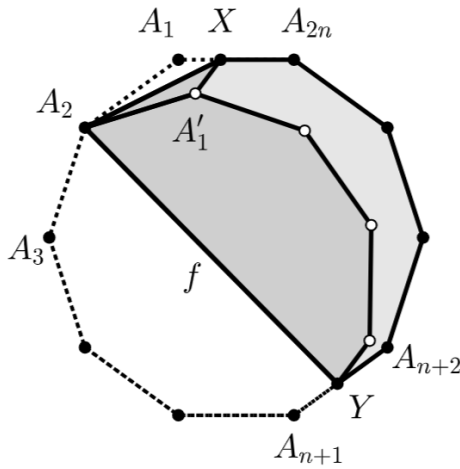
Y は線分 $A_{n+1}A_{n+2}$ を内分する点であることが従う．よって，正 $2n$ 角形 $A_{n+1}A_n \dots A_{n+2}$ において定理 4.3 を適用することで，

$$\frac{b}{a} = \frac{\overline{A_{2n}X}}{\overline{XA_1}} = \frac{2\overline{A_{n+1}Y}}{\overline{YA_{n+2}}}$$

すなわち

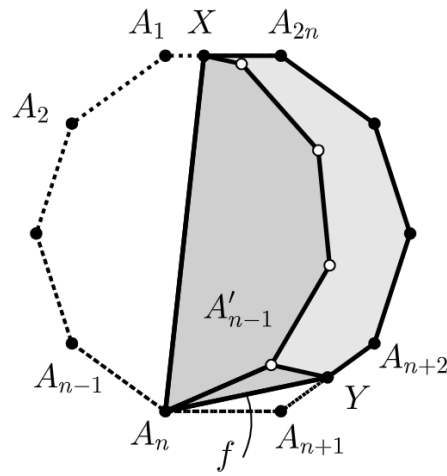
$$\frac{\overline{A_{n+2}Y}}{\overline{YA_{n+1}}} = \frac{2a}{b}$$

を得る．したがって，点 Y が線分 $A_{n+2}A_{n+1}$ を $2a : b$ に内分することが示された． $\square$



$$A_1X : XA_{2n} = a : b \text{ のとき,} \\ A_{n+2}Y : YA_{n+1} = 2a : b$$

図 9: 定理 4.3



$$A_1X : XA_{2n} = a : b \text{ のとき,} \\ A_{n+2}Y : YA_{n+1} = 2a : b$$

図 10: 定理 4.4

定理 4.3 と定理 4.4 それぞれにおいて， $n = 2$ の場合を考えると，どちらも正方形の芳賀第 2 定理（定理 1.5）において点 A, B, C, D がそれぞれ点 A_1, A_2, A_3, A_4 に置き換わったものである．したがって，定理 4.3 と定理 4.4 はどちらも定理 1.5 の拡張といえることができる．本稿では，定理 4.3 と定理 4.4 を区別するために，前者を「芳賀第 2 定理 I」，後者を「芳賀第 2 定理 II」と名付けることにした．

5 まとめ

本稿では，正方形の折り紙に関する定理として知られている芳賀定理について，正 $2n$ 角形 ($n \geq 2$) の場合への拡張を行い，初等幾何に基づく方法によってその成立を示した．具体的には，芳賀第 1 定理，第 2 定理，第 3 定理をそれぞれ正 $2n$ 角形の場合に拡張し，正方形の場合と同様に辺を内分する比が得られることを明らかにした．

また，芳賀第 2 定理には互いに異なる 2 通りの折り方が存在することを示し，一方を「芳賀第 2 定理 I」，もう一方を「芳賀第 2 定理 II」と命名することを提案した．さらに，文献 [1] において示されている芳賀定理は，本稿で得られた正 $2n$ 角形への拡張における $n = 2$ の場合に対応することを明らかにし，既存の結果をより一般的な枠組みの中に位置づけた．

今後の課題としては，正 $2n$ 角形以外の多角形への拡張や，異なる折り操作に基づく類似の性質の探究などが挙げられる．

謝辞

本稿の作成にあたり，長岡高校の遠山勢都子先生並びに橋立誠司先生に深く感謝申し上げます．お二人には，草稿をご精読いただき，内容および表現に関して多くの貴重なご助言を賜りました．先生方のご指導により，本稿をより良い形にまとめることができました．ここに厚く御礼申し上げます．

参考文献

- [1] 芳賀和夫，『オリガミクス 1』，日本評論社，42-53 (1999).
- [2] 清宮俊雄，『初等幾何学』，裳華房，1-4, 9-12 (2002).
- [3] 安藤哲哉，『三角形と円の幾何学』，海鳴社，2-4(2006).